الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

DEMOCRATIC AND POPULAR REPUBLIC OF ALGERIA

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH

جامعة البليدة 2-لونيسي علي

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

UNIVERSITY OF BLIDA 2 - LOUNICI ALI

FACULTY OF ECONOMICS, COMMERCE AND MANAGEMENT SCIENCES

مطبوعة بعنوان:

رياضيات المؤسسة:

دروس وتطبيقات

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس جدع مشترك علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير

من إعداد الدكتور:

بهلولي فيصل

السنة الجامعية: 2019 -2020

فهرس المحتويات

العنوان	الصفحة
فهرس المحتويات	**III-I**
مقدمة	**02-01**
المحور الأول: البرمجة الخطية Linear Programming	
I. مفهوم البرمجة الخطية	**03**
II. مجالات البرمجة الخطية	**04**
III. افتراضات البرمجة الخطية	**04**
IV. بناء أو صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية	**05**
V. تمارين محلولة	**09**
VI. تمارين غير محلولة	**13**
المحور الثاني: حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية Linear Programming – The Graphical Method	
I. مفهوم الطريقة البيانية	**16**
II. خطوات الحل وفق الطريقة البيانية	**16**
III. الحالات الخاصة للطريقة البيانية	**21**
IV. تمارين محلولة	**27**
V. تمارين غير محلولة	**33**
المحور الثالث: حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة (السمبلكس) Linear Programming -The Simplex Method	
I. مفهوم الطريقة المبسطة (السمبلكس)	**35**
II. حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة- السمبلكس في حالة التعظيم	**35**
III. حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة- السمبلكس في حالة التخفيض	**42**
IV. الحالات الخاصة للطريقة المبسطة-السمبلكس	**53**
V. تمارين محلولة	**57**
VI. تمارين غير محلولة	**71**

المحور الرابع: البرنامج الثنائي أو المقابل Dual Program	
I. مفهوم البرنامج الثنائي (المقابل)	**73**
II. خصائص ومميزات البرنامج الثنائي (المقابل)	**73**
III. تحويل البرنامج الأولي إلى البرنامج الثنائي وصياغة المسألة الثنائية	**74**
IV. الانتقال من الحل الأمثل للبرنامج الأولي إلى الحل الأمثل للبرنامج الثنائي أو	**75**
V. تمارين محلولة	**79**
VI. تمارين غير محلولة	**86**
المحور الخامس: تحليل الحساسية Sensivity Analysis	
I. مفهوم تحليل الحساسية	**87**
II. التغير في معاملات دالة الهدف c_j	**87**
III. التغير في الموارد المتاحة للقيود b_i	**92**
IV. إدخال متغير أو متغيرات جديدة للمسألة	**94**
V. إخراج متغير أو متغيرات من المسألة	**96**
VI. إدخال قيد أو قيود جديدة للمسألة	**99**
VII. إخراج قيد أو قيود من المسألة	**100**
VIII. التغير في المعاملات الفنية للقيود a_{ij}	**103**
IX. تمارين محلولة	**103**
X. تمارين غير محلولة	**111**
المحور السادس: مسائل النقل Transportation Problem	
I. مفهوم مشكلة النقل	**114**
II. صياغة مشكلة النقل	**114**
III. إيجاد الحل الأولي (الابتدائي) لمشكلة النقل	**116**
IV. إيجاد الحل الأمثل لمشكلة النقل	**121**
V. حالات خاصة لمشكلة النقل	**127**

VI. تمارين محلولة	**133**
VI. تمارين غير محلولة	**143**
المحور السابع: مدخل للبرمجة غير الخطية **Introduction to Nonlinear Programming**	
I. مفهوم البرمجة غير الخطية	**145**
II. البرمجة غير الخطية- أمثلية المتغير المفرد	**145**
III. البرمجة غير الخطية- أمثلية متعدد المتغيرات بدون قيود	**150**
IV. البرمجة غير الخطية- أمثلية متعدد المتغيرات ذو قيود	**155**
V. تمارين محلولة	**160**
VI. تمارين غير محلولة	**179**
قائمة المراجع	**183**

مقدمة:

إن التغيرات التي حدثت ولازلت تحدث في مجالات الحياة المختلفة تقتضي التعامل معها بمنهج عملي قائم على أساس العلم والمنطق والتفكير الرشيد الذي يسبق اتخاذ القرارات المختلفة، وتواجه المؤسسات اليوم على اختلاف أنواعها تحديات كبيرة في ظل ما يسمى عصر المعرفة أو عصر المعلوماتية أو الاقتصاد الرقمي، لذا لابد أن يتمتع متخذي القرارات في هذه المؤسسات بقدر كبير من الإلمام بالأساليب العلمية الحديثة وخصوصا الكمية منها والتي تعتبر كأداة مساعدة في اتخاذ القرارات المختلفة.

بالمقابل تأتي رياضيات المؤسسة لتوفر العديد من الأساليب والطرق والتي يمكن تبنيها في حل الكثير من المشاكل الإدارية والاقتصادية، خاصة وأنها أصبحت اليوم محل الدراسة في جميع المعاهد والجامعات في العالم وفي كل التخصصات، والاستعانة بأساليبها الكمية في مختلف الدراسات والبحوث لزيادة دقة النتائج المتوصل إليها.

وتعرف رياضيات المؤسسة على أنها العلم التطبيقي لاتخاذ القرارات، حيث أنها تستخدم كل الطرق العلمية المتاحة لمواجهة مشاكل الإدارة، وذلك بغية التوصل إلى مستوى عال من الترشيد في اتخاذ القرارات، كما تعرف أيضا على أنها التطبيق العلمي للطرق الرياضية والإحصائية في حل مختلف المشاكل الإدارية و الاقتصادية، والتي تواجه المسير في أداء مهامه، والتي يمكن التعبير عنها بالصيغ الكمية بالدرجة الأولى.

وتعد هذه المطبوعة محاولة لاستيعاب كل المفاهيم المتعلقة بمقياس رياضيات المؤسسة، وفي عرضنا لمحاور هذه المطبوعة راعينا السهولة والتوسع في الشرح وإعطاء أمثلة وتطبيقات بالاعتماد على منهجية بسيطة وواضحة من خلال تجربتنا البيداغوجية في هذا المجال، وقد وزعت محتويات هذه المطبوعة على سبعة محاور أساسية، جاءت على النحو التالي:

- المحور الأول: وجاء بعنوان البرمجة الخطية من خلال التطرق إلى مفهوم البرمجة الخطية ومجالاتها وافتراضاتها، وكذا كيفية صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية، مع تقديم تمارين محلولة وأخرى غير محلولة حول هذا المحور.

- المحور الثاني: وجاء بعنوان البرمجة الخطية والطريقة البيانية، من خلال التطرق إلى مفهوم الطريقة البيانية والخطوات الأساسية للحل وفق هذه الطريقة، وكذا الحالات الخاصة للطريقة البيانية، مع تقديم تمارين محلولة وأخرى غير محلولة حول هذا المحور.

- المحور الثالث: وجاء بعنوان البرمجة الخطية والطريقة المبسطة (السبملكس) ، من خلال التطرق إلى مفهوم الطريقة المبسطة (السبملكس) وحل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة- السمبلكس في حالتي التعظيم والتخفيض، وكذا الحالات الخاصة للطريقة المبسطة-السمبلكس، مع تقديم تمارين محلولة وأخرى غير محلولة حول هذا المحور.

- المحور الرابع: وجاء بعنوان البرنامج الثنائي أو المقابل، من خلال التطرق إلى مفهوم وخصائص ومميزات البرنامج الثنائي (المقابل)، وكذا خطوات تحويل البرنامج الأولي إلى البرنامج الثنائي وصياغة المسألة الثنائية، مع تقديم تمارين محلولة وأخرى غير محلولة حول هذا المحور.

- المحور الخامس: وجاء بعنوان تحليل الحساسية، من خلال التطرق إلى مفهوم تحليل الحساسية، ثم إلى أثر التغير في معاملات دالة الهدف، التغير في الموارد المتاحة للقيود، أثر إضافة متغير أو متغيرات جديدة، أثر إخراج متغير، أثر إضافة قيد جديد، وأخيرا أثر إخراج قيد من المسألة على الحل الأمثل، مع تقديم تمارين محلولة وأخرى غير محلولة حول هذا المحور.

- المحور السادس: وجاء بعنوان مسائل النقل، من خلال التطرق إلى مفهوم مشكلة النقل، ثم كيفية صياغة مشكلة النقل، وإيجاد الحل الأولي ثم الحل الأمثل لمشكلة النقل، وكذا الحالات الخاصة لمشكلة النقل، مع تقديم تمارين محلولة وأخرى غير محلولة حول هذا المحور.

- المحور السابع: وجاء بعنوان مدخل للبرمجة غير الخطية، من خلال التطرق إلى البرمجة غير الخطية- أمثلية المتغير المفرد، ثم البرمجة غير الخطية-أمثلية متعدد المتغيرات بدون قيود، والبرمجة غير الخطية- أمثلية متعدد المتغيرات ذو قيود، مع تقديم تمارين محلولة وأخرى غير محلولة حول هذا المحور.

وفي الأخير نتمنى أننا وفقنا ولو بالقدر القليل في تسهيل فهم ودراسة مقياس رياضيات المؤسسة لكل من له اهتمام بهذا المقياس من أساتذة وباحثين وطلبة، كما نتقدم بالشكر الجزيل لكل من قدم لنا النصيحة والملاحظات والنقد البناء الذي يخدم هذا العمل.

المحور الأول: البرمجة الخطية
Linear Programming

تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الأساسية والمهمة في رياضيات المؤسسة، وتكمن أهميتها في كونها وسيلة لدارسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، يقدم نموذج البرمجة الخطية طريقة كفؤة لتحديد القرار الأمثل (أو الاستراتيجية المثلى) من بين عدد كبير من البدائل، التي يخضع كل منها إلى مجموعة من المحددات والقيود، وبشكل يساهم بتحقيق أهداف الإدارة، وهي أداة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل التي تواجه الإدارة.

I. مفهوم البرمجة الخطية

إن البرمجة الخطية هي أداة بيانية ورياضية، وتعتبر أساليب البرمجة الخطية (Linear Programming) أحد أساليب البرمجة الرياضية التي تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل لحلها، وتعلب دورا هاما في الوصول إلى التوزيع الأمثل للموارد المتاحة على الأنشطة المختلفة وفقا للهدف المطلوب.

ولقد ظهرت بوادر تطبيق البرمجة الخطية لأول مرة سنة 1951 في أعمال العالمين الرياضيين (G.B. Dantzig and T.C. Coopmans)، وسمي هذا الأسلوب بالبرمجة (Programming) لأنه يهتم في البحث عن البرنامج (Program) الذي يحقق الهدف المطلوب من بين عدد كبير من البرامج المتاحة، أما صفة الخطية (Linearity) فإنها تعني أن جميع العلاقات التي تربط بين مختلف عناصر النموذج الرياضي للمشكلة المدروسة هي علاقات خطية.

وعلى هذا الأساس يمكن تعريف البرمجة الخطية على أنها " أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموراد، ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة، بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة– أي أن يكون توزيعها مثاليا "، وتعتبر نماذج البرمجة الخطية من أبسط وأسهل النماذج الرياضية، والتي يمكن إنشاؤها لمعالجة مشاكل البرمجة الصناعية والحكومية الكبرى.

II. مجالات البرمجة الخطية

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا، ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية في مجالات العلوم الاقتصادية والمالية والتجارية وعلوم التسيير عامة ما يلي:

في حالة التعظيم	في حالة التخفيض
- تعظيم الأرباح.	- تخفيض التكاليف.
- تعظيم الإنتاج.	- تخفيض الخسائر.
- تعظيم طاقات التخزين.	- تخفيض عدد العمال.
- تعظيم استخدام رؤوس الأموال واليد العاملة.	- تخفيض الأجور الإجمالية.

III. افتراضات البرمجة الخطية

لكي تكون نتائج تطبيق نموذج البرمجة الخطية صادقة وموثوق بها من الناحيتين العلمية والعملية، ينبغي توفر مجموعة من الشروط الأساسية في صياغة النموذج، ويطلق على هذه الشروط بافتراضات النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، هذه الافتراضات يمكن تلخيصها فيما يلي:

1- **الخطية Linearity:** يقصد به أن تكون العلاقة بين متغيرات دالة الهدف وقيود النموذج ذات طبيعة خطية، أي أن حدوث أي تغييرات في قيمة أحد المتغيرات تؤدي إلى تغيرات ثابتة ومتناسبة في قيمة المتغيرات الأخرى الداخلة في النموذج.

2- **التأكد Certainty:** تفترض البرمجة الخطية بأن تكون معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف وقيود النموذج معروفة وثابتة أثناء فترة معالجة المشكلة المدروسة.

3- **التناسبية Proportionality:** يقصد به أن تكون مساهمة العوامل في دالة الهدف والكميات المستخدمة من الموارد في القيود متناسبة مع قيمة كل متغير من المتغيرات القرارية.

4- **الإضافية Additivity:** ويعني إن كل نشاط يتم إضافته يتحد مع مجموعة قيود النموذج، وهذا يعني عدم وجود تداخل بين الأنشطة المختلفة.

5- **قابلية القسمة Divisibility:** ويشير إلى إمكانية أن تأخذ بعض المتغيرات القرارية قيما كسرية، وليس بالضرورة أن يتم التعبير عن جميع المتغيرات بأعداد صحيحة.

6- **عدم السلبية Non-Negativity:** ويقصد به أن تكون قيم المتغيرات القرارية موجبة ($x_j \geq 0$)، وهذا يعني أنه ليس من المعقول أن يتم إنتاج عدد سالب من السيارات مثلا.

IV. بناء أو صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية

إن أهمية أسلوب البرمجة الخطية يعود إلى أهمية المشاكل التي يمكن حلها بصفة عامة، ولكن ليس كل مشكلة يمكن حلها بأسلوب البرمجة الخطية، حيث يتطلب حل المشكلة بأسلوب البرمجة الخطية أن تتوفر ثلاث عناصر أساسية هي:

1- تحديد دالة الهدف Objective Function: وهو الهدف المنشود والمراد تحقيقه، وإمكانية التعبير عنه في صورة دالة خطية (Linear Function)، والحصول على قيمة رقمية له ومحاولة تعظيم هذه القيمة وإيجاد النهاية العظمى لها (a Maximum Point) إذا كان الهدف المنشود هو التعظيم، أو تقليل القيمة وإيجاد النهاية الصغرى (a Minimum Point) إذا كان الهدف هو التخفيض أو التدنئة.

2- تحديد القيود Constraints: أي إمكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات القرارية والامكانيات المتاحة في صورة قيود خطية (Linear Constrains)، وهي توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة بشكل متراجحات (Linear Inequalities) أو معادلات خطية (Linear Equations)، أو خليط منهما وتسمى بالقيود الهيكلية.

3- شرط عدم السلبية Non-Negativity: إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو معدومة وغير سالبة $(x_j \geq 0)$.

وبناءا على ما تقدم، يمكن التعبير عن الخطوات أعلاه بصيغة رياضية على النحو التالي:

$$1-\ Max\ or\ Min(Z) = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j$$

Subject to:

$$2-\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j (\leq, =, \geq) b_i$$

$$3-\ x_j \geq 0$$

حيث أن:

Z : يمثل دالة الهدف المطلوب تعظيمها أو تخفيضها.

c_j : يمثل معامل متغير القرار x_j و تمثل الربح أو التكلفة.

x_j : يمثل متغير القرار رقم (j) و يمثل نشاط معين .

a_{ij} : كمية الموارد المحدودة من النوع (i) المخصصة لكل وحدة واحدة من النشاط رقم (j) .

b_i : تمثل الموارد المحدودة من النوع (i) .

مثال (01): تقوم إحدى المؤسسات المتخصصة بإنتاج الأجهزة الكهربائية باقتراح خطة لإنتاج نوعين من المنتجات (A,B)، وذلك من خلال استغلال الطاقة التشغيلية المتاحة لثلاثة أنواع من الآلات.

يحتاج المنتوج (A) إلى (06) ساعات في الآلة الأولى، و(03) ساعات في الآلة الثانية، و(02) ساعتين في الآلة الثالثة، أما المنتوج (B) فيحتاج إلى (04) ساعات في الآلة الأولى، و(05) ساعات في الآلة الثانية، و(03) ساعات في الآلة الثالثة، علما أن عدد ساعات التشغيل المتاحة أسبوعيا هي (60) ساعة للآلة الأولى و(50) ساعة للآلة الثانية و(70) ساعة للآلة الثالثة، وأن الربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المنتوج (A) بلغ (80) دج، و(95) دج من المنتوج (B).

- قم بصياغة البرنامج الخطي لإنتاج عدد الوحدات من المنتوجيتن، بما يحقق للمؤسسة أكبر قدر ممكن من الأرباح.

الحل:

قبل البدء في صياغة البرنامج الخطي للمشكلة، نقوم بتلخيص البيانات في الجدول التالي:

الآلات	المنتجات		عدد ساعات التشغيل المتاحة أسبوعيا
	المنتوج (A)	المنتوج (B)	
الآلة الأولى	6	4	60
الآلة الثانية	3	5	50
الآلة الثالثة	2	3	70
الربح المتوقع	80	95	

يتضح من خلال بيانات مشكلة المزيج الإنتاجي الواردة في الجدول السابق وجود متغيرين قراريين يمثلان عدد الوحدات المنتجة من كلا المنتوجين، وعليه نفرض أن:

x_1 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج (A).

x_2 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج (B).

Z : يمثل الأرباح الكلية المتوقعة.

ولصياغة البرنامج الخطي للمشكلة ينبغي تحديد ما يلي:

- دالة الهدف: بما أن الهدف هو تعظيم الأرباح، إذن فدالة الهدف تكون على الشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 80x_1 + 95x_2$$

حيث أن:

$80x_1$: يمثل الربح من المنتوج (A).

$95x_2$: يمثل الربح من المنتوج (B).

- قيود المشكلة: وتكون على الشكل التالي:

قيد الآلة الأولى: $6x_1 + 4x_2 \leq 60$

قيد الآلة الثانية: $3x_1 + 5x_2 \leq 50$

قيد الآلة الثالثة: $2x_1 + 3x_2 \leq 70$

- شرط عدم السلبية: ويكون على الشكل التالي:

$(x_1 . x_2 \geq 0)$

وعليه يكون البرنامج الخطي بصيغته النهائية على الشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 80x_1 + 95x_2$$

$$s/c \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 70 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

مثال (02): ترغب مؤسسة في إنتاج العلف الحيواني بإنتاج ثلاث أنواع من الأعلاف الغذائية، وإن كل نوع من الأعلاف يتضمن مزيج من مركبات البروتين والألياف.

يحتاج النوع الأول من الأعلاف إلى (20) كغ من البروتين و(50) كغ من الألياف، أما النوع الثاني من الأعلاف فيحتاج إلى (25) كغ من البروتين و(40) كغ من الألياف، في حين يحتاج النوع الثالث من الألياف إلى (180) كغ من البروتين و(650) كغ من الألياف.

وإن تكاليف شراء المركبات الداخلى في كل نوع من الأعلاف هي (100) دج للنوع الأول، و(150) دج للنوع الثاني و(120) دج للنوع الثالث.

- قم بصياغة البرنامج الخطي لإنتاج الأعلاف الغذائية الثلاثة، بما يجعل تكاليف إنتاج الأعلاف أقل ما يمكن.

الحل:

قبل البدء في صياغة البرنامج الخطي للمشكلة، نقوم بتلخيص البيانات في الجدول التالي:

المركبات	الأعلاف الغذائية			الاحتياجات الدتيا (كغ)
	النوع الأول	النوع الثاني	النوع الثالث	
البروتين	20	25	30	180
الألياف	50	40	60	650
تكاليف الشراء	100	150	120	

يتضح من خلال بيانات مشكلة المزيج الغذائي الواردة في الجدول السابق وجود ثلاثة متغيرات قرارية تمثل الكميات المنتجة من الأنواع الثلاثة من الأعلاف، وعليه نفرض أن:

x_1 : يمثل الكميات المنتجة للنوع الأول من الأعلاف.

x_2 : يمثل الكميات المنتجة للنوع الثاني من الأعلاف.

x_3 : يمثل الكميات المنتجة للنوع الثالث من الأعلاف.

Z : تمثل التكاليف الكلية المتوقعة.

ولصياغة البرنامج الخطي للمشكلة ينبغي تحديد ما يلي:

- دالة الهدف: بما أن الهدف هو تقليل التكاليف، إذن فدالة الهدف تكون على الشكل التالي:

$$Min\ (Z) = 100x_1 + 150x_2 + 120x_3$$

حيث أن:

$100x_1$: يمثل تكاليف النوع الأول من الأعلاف.

$150x_2$: يمثل تكاليف النوع الثاني من الأعلاف.

$120x_3$: يمثل تكاليف النوع الثالث من الأعلاف.

- قيود المشكلة: وتكون على الشكل التالي:

قيد البروتين: $20x_1 + 25x_2 + 30x_2 \geq 180$

قيد الألياف: $50x_1 + 40x_2 + 60x_2 \geq 650$

- شرط عدم السلبية: ويكون على الشكل التالي:

$$(x_1, x_2, x_3 \geq 0)$$

وعليه يكون البرنامج الخطي بصيغته النهائية على الشكل التالي:

$$Min\ (Z) = 100x_1 + 150x_2 + 120x_3$$

$$s/c \begin{cases} 20x_1 + 25x_2 + 30x_3 \geq 180 \\ 50x_1 + 40x_2 + 60x_3 \geq 650 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

V. تمارين محلولة

التمرين الأول: تقوم إحدى المؤسسات الصناعية بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات (1، 2، 3)، وترغب في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يوميا من كل منتوج بحيث تحصل على أكبر ربح ممكن، يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتوج المرور على ثلاث عمليات إنتاجية (I، II، III)، والجدول التالي يبين الزمن (بالدقائق) اللازم لإنتاج الوحدة الواحدة من كل منتوج من العمليات المختلفة، وكذلك الربح المحقق من الوحدة الواحدة والزمن الكلي المتاح للعمليات الثلاثة.

العمليات	الزمن المطلوب لإنتاج المنتجات الثلاثة			الزمن المتاح للتشغيل (دقيقة/يوميا)
	المنتوج (1)	المنتوج (2)	المنتوج (3)	
العملية I	2	2	3	60
العملية II	5	0	4	50
العملية III	3	6	0	70
ربح الوحدة الواحدة	5	4	7	

❖ **المطلوب:** صياغة البرنامج الخطي لإنتاج عدد الوحدات من المنتجات الثلاث، بما يحقق للمؤسسة أكبر قدر ممكن من الأرباح.

الحل:

يتضح من خلال بيانات مشكلة المزيج الإنتاجي الواردة في الجدول السابق وجود ثلاثة متغيرات قرارية تمثل عدد الوحدات المنتجة من الأنواع الثلاثة من المنتجات، وعليه نفرض أن:

x_1 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الأول.

x_2 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الثاني.

x_3 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الثالث.

Z : يمثل الأرباح الكلية المتوقعة.

ولصياغة البرنامج الخطي للمشكلة ينبغي تحديد ما يلي:

- دالة الهدف: بما أن الهدف هو تعظيم الأرباح، إذن فدالة الهدف تكون على الشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

حيث أن:

$5x_1$: يمثل الربح من المنتوج الأول.

$4x_2$: يمثل الربح من المنتوج الثاني.

$7x_3$: يمثل الربح من المنتوج الثالث.

- قيود المشكلة: وتكون على الشكل التالي:

قيد العملية الأولى: $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 420$

قيد العملية الثانية: $5x_1 + 2x_3 \leq 440$

قيد العملية الثالثة: $3x_1 + 6x_2 \leq 465$

- شرط عدم السلبية: ويكون على الشكل التالي:

$$(x_1 . x_2 . x_3 \geq 0)$$

وعليه يكون البرنامج الخطي بصيغته النهائية على الشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 420 \\ 5x_1 + 2x_3 \leq 440 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 465 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني: تقوم مؤسسة متخصصة في إنتاج الملابس الرياضية بإنتاج منتوجين أساسيين (1) و (2)، حيث تتم عملية الإنتاج في مصنعين مستقلين هما (A ,B)، وفيما يلي جدول يلخص العملية الإنتاجية:

المصانع	وحدة من المنتوج (1)		وحدة من المنتوج (2)		الطاقة الإنتاجية
	الساعات اللازمة	تكاليف الإنتاج	الساعات اللازمة	تكاليف الإنتاج	
المصنع A	4	8	3	7	2000
المصنع B	3	5	5	8	2500
سعر بيع الوحدة	15		10		
الخطة الإنتاجية	800		1000		

❖ **المطلوب:** صياغة البرنامج الخطي لإنتاج عدد الوحدات من المنتوجين، بما يحقق للمؤسسة أكبر قدر ممكن من الأرباح.

الحل:

يتضح من خلال بيانات مشكلة المزيج الإنتاجي الواردة في الجدول السابق وجود أربعة متغيرات قرارية تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوجين في كل مصنع، وعليه نفرض أن:

x_{11} : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الأول في المصنع A.

x_{12} : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الأول في المصنع B.

x_{21} : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الثاني في المصنع A.

x_{22} : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الثاني في المصنع B.

Z : يمثل الأرباح الكلية المتوقعة.

ولصياغة البرنامج الخطي للمشكلة ينبغي تحديد ما يلي:

- دالة الهدف: بما أن الهدف هو تعظيم الأرباح، يجب حساب الربح الوحدوي لكل منتوج في كل مصنع كما يلي:

الربح الوحدوي = سعر بيع الوحدة – تكلفة إنتاج الوحدة

الربح الوحدوي للمنتوج الأول في المصنع A = 15 – 8 = 7

الربح الوحدوي للمنتوج الأول في المصنع B = 15 – 5 = 10

الربح الوحدوي للمنتوج الثاني في المصنع A = 10 – 7 = 3

الربح الوحدوي للمنتوج الثاني في المصنع B = 10 – 8 = 2

إذن فدالة الهدف تكون على الشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 7x_{11} + 10x_{12} + 3x_{21} + 2x_{22}$$

- قيود المشكلة: وتكون على الشكل التالي:

قيد المصنع الأول: $4x_{11} + 3x_{21} \leq 2000$

قيد المصنع الثاني: $3x_{12} + 5x_{22} \leq 2500$

قيد الخطة الإنتاجية للمنتوج الأول: $x_{11} + x_{12} \geq 800$

قيد الخطة الإنتاجية للمنتوج الثاني: $x_{21} + x_{22} \geq 1000$

- شرط عدم السلبية: ويكون على الشكل التالي:

$$(x_{11}.x_{12}.x_{21}.x_{22} \geq 0)$$

وعليه يكون البرنامج الخطي بصيغته النهائية على الشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 7x_{11} + 10x_{12} + 3x_{21} + 2x_{22}$$

$$s/c \quad \begin{cases} 4x_{11} + 3x_{21} \leq 2000 \\ 3x_{12} + 5x_{22} \leq 2500 \\ x_{11} + x_{12} \geq 800 \\ x_{21} + x_{22} \geq 1000 \\ (x_{11}.x_{12}.x_{21}.x_{22} \geq 0) \end{cases}$$

التمرين الثالث: استلمت مؤسسة مختصة في الصناعات الكيميائية طلبا للحصول على 1400 كغ من خليط مكون من ثلاث مركبات (A, B, C) بالمواصفات التالية:

- يجب أن لا يحتوي الخليط على أكثر من 400 كغ من المركب A.
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل على 200 كغ من المركب B.
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل على 150 كغ من المركب C.

علما أن تكلفة إنتاج الكيلوغرام الواحد من المركبات (A, B, C) هي على التوالي: 2 دج، 3 دج، 4 دج.

❖ **المطلوب:** صياغة البرنامج الخطي لإنتاج المركبات الثلاثة، بما يجعل تكاليف إنتاج هذه المركبات أقل ما يمكن.

الحل:

يتضح من خلال معطيات وجود ثلاثة متغيرات قرارية تمثل الكميات المنتجة من الأنواع الثلاثة من المركبات، وعليه نفرض أن:

x_1 : يمثل الكميات المنتجة للمركب A.

x_2 : يمثل الكميات المنتجة للمركب B.

x_3 : يمثل الكميات المنتجة للمركب C.

Z : تمثل التكاليف الكلية المتوقعة.

ولصياغة البرنامج الخطي للمشكلة ينبغي تحديد ما يلي:

- دالة الهدف: بما أن الهدف هو تقليل التكاليف، إذن فدالة الهدف تكون على الشكل التالي:

$$Min\ (Z) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

حيث أن:

$2x_1$: يمثل تكاليف إنتاج المركب A.

$3x_2$: يمثل تكاليف إنتاج المركب B.

$4x_3$: يمثل تكاليف إنتاج المركب C.

- قيود المشكلة: وتكون على الشكل التالي:

قيد المركب A: $x_1 \leq 400$

قيد المركب B: $x_2 \geq 200$

قيد المركب C: $x_3 \geq 150$

قيد الطلبية: $x_1 + x_2 + x_3 = 1400$

- شرط عدم السلبية: ويكون على الشكل التالي:

$(x_1 . x_2 . x_3 \geq 0)$

وعليه يكون البرنامج الخطي بصيغته النهائية على الشكل التالي:

$$Min\ (Z) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$s/c \quad \begin{cases} x_1 \leq 400 \\ x_2 \geq 200 \\ x_3 \geq 150 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1400 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

VI. تمارين غير محلولة

<u>التمرين الأول:</u> تنتج إحدى مؤسسات النجارة ثلاث منتجات هي: الكراسي، الطاولات، الخزائن، حيث تمر عملية إنتاج هذه المنتجات عبر ثلاث ورشات طاقة العمل القصوى فيها هي على التوالي: 200 ساعة، 140 ساعة و300 ساعة عمل يوميا، حيث أن:

- إنتاج وحدة واحدة من الكراسي يتطلب 20 ساعة عمل في الورشة الأولى، و14 ساعة عمل في الورشة الثانية، و10 ساعات عمل في الورشة الثالثة.
- إنتاج وحدة واحدة من الطاولات يتطلب 18 ساعة عمل في الورشة الأولى، و20 ساعة عمل في الورشة الثانية، و5 ساعات عمل في الورشة الثالثة.
- إنتاج وحدة واحدة من الخزائن يتطلب 25 ساعة عمل في الورشة الأولى، و20 ساعة عمل في الورشة الثانية، و10 ساعات عمل في الورشة الثالثة.

مع العلم أن ربح الوحدة الواحدة من الكراسي هو 400 دج، أما ربح الوحدة الواحدة من الطاولات هو 200 دج، في حين أن ربح الوحدة الواحدة من الخزائن هو 200 دج كذلك.

❖ **المطلوب:** صياغة البرنامج الخطي لإنتاج عدد الوحدات من المنتجات الثلاث، بما يحقق للمؤسسة أكبر قدر ممكن من الأرباح.

التمرين الثاني: تقوم مؤسسة بإنتاج آلتين (1) و(2) في ورشتين مستقلتين (A, B)، والجدول التالي يلخص ظروف الإنتاج:

الورشات	الساعات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة		الساعات المتاحة
	الآلة (1)	الآلة (2)	
الورشة A	1	2	400
الورشة B	3	4	600
الإنتاج المتوقع	300	200	

مع العلم أن الهامش الإجمالي المنتظر هو 800 دج للوحدة بالنسبة للآلة (1) المصنوعة في الورشة A، وأن الهامش الإجمالي المنتظر هو 1500 دج للوحدة بالنسبة للآلة (1) المصنوعة في الورشة B، أما الهامش الإجمالي المنتظر هو 1000 دج للوحدة بالنسبة للآلة (2) المصنوعة في الورشة A، في حين أن الهامش الإجمالي المنتظر هو 1200 دج للوحدة بالنسبة للآلة (1) المصنوعة في الورشة B.

❖ **المطلوب:** صياغة البرنامج الخطي لإنتاج عدد الوحدات من الآلتين، بما يحقق للمؤسسة أكبر قدر ممكن من الأرباح.

التمرين الثالث: تنتج مؤسسة ثلاث منتجات هي (A, B, C) باستخدام نوعين من المواد الأولية (MP_1, MP_2)، والجدول التالي يوضح استخدام المواد الأولية في انتاج المنتجات الثلاث:

المواد الأولية	الكميات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة			الكميات المتاحة
	المنتوج A	المنتوج B	المنتوج C	
المادة MP_1	2	3	4	800
المادة MP_2	1	1	6	100

علما أن:

- إجمالي مبيعات المنتوجين (A,B) معا يجب أن لا تقل عن 100 وحدة.

- مبيعات المنتوج C يجب أن لا تقل عن 40 وحدة وأن لا تزيد عن 120 وحدة.
- الطاقة التخزينية المتاحة هي 500 وحدة.
- تكلفة الإنتاج للمنتجات (A, B, C) تقدر بـــ 10 دج، 8 دج و12 دج للوحدة من كل منتوج على التوالي.

❖ **المطلوب:** صياغة البرنامج الخطي لإنتاج المنتجات الثلاثة، بما يجعل تكاليف إنتاج هذه المنتجات أقل مـــا يمكن.

التمرين الرابع: تقوم مؤسسة بإنتاج منتوجين هما (P_1, P_2) في ورشتين (A,B)، إذ لـــدى المؤسســـة خطـــة الإنتاج السنوية بـــ 7000 وحدة من P_2، والطلب في السوق محدود بـــ 10000 وحدة من P_2، أمـــا الطاقـــة الإنتاجية لـــ P_1 تقدر بـــ 800 وحدة، والطلب في السوق غير محدود لـــ P_1، وفيما يلي ظروف الإنتاج:

- الورشة A: تتطلب 4 ساعات لإنتاج وحدة من المنتوج P_1 و5 ساعات لإنتاج وحدة من المنتوج P_2.
- الورشة B: تتطلب 3 ساعات لإنتاج وحدة من المنتوج P_1 و6 ساعات لإنتاج وحدة من المنتوج P_2.
- الطاقة الإنتاجية في الورشة A هي 500 ساعة وفي الورشة B هي 600 ساعة.
- الهامش على التكلفة المتغيرة للمنتوجين (P_1, P_2) هي: 25 دج و40 دج لكل منتوج على التوالي.

❖ **المطلوب:** صياغة البرنامج الخطي لإنتاج المنتوجين، بما يجعل تكاليف إنتاج هذه المنتجين أقل ما يمكن.

المحور الثاني: حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية

Linear Programming – The Graphical Method

يقصد بحل البرنامج الخطي إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لهـا دون تجـاوز حدود القيود، سواء كانت دالة الهدف في حالة تعظيم أو تخفيض، وهناك عدة طرق للتوصل إلى حل مسـائل البرمجة الخطية، إذ يتوقف استخدام أي من هذه الطرق على طبيعة المشكلة وحجمها، ومن بين هذه الطـرق هناك الطريقة البيانية، والتي تستخدم إذا كان البرنامج الخطي يحتوي على متغيرين فقط.

I. مفهوم الطريقة البيانية

تعتبر الطريقة البيانية وسيلة أولية لحل مسائل البرمجة الخطية، كما تعد من أبسط الطرق التي تهدف إلى إيجاد الحلول المناسبة للمسائل الإدارية المختلفة (مسائل الإنتاج، مسائل التسويق، مسائل الأفراد...)، وخاصة تلك المتعلقة باتخاذ القرارات ذات المواضيع الفنية والمعايير الكمية، وتمتاز هذه الطريقة فـي حـل نمـاذج البرمجة الخطية ببساطتها وسهولة استخدامها، وتعتمد على الرسم البياني بالدرجة الأولى والتي تتم في إطـار الإحداثيات الأفقية والعمودية، إلا أنه ومن بين سلبيات هذه الطريقة أنها تستخدم فقط إذا كان البرنامج الخطـي يحتوي على متغيرين فقط، إذ يتعذر رسم البرنامج في حالة احتواءه على أكثر مـن متغيـرين، حيـث يـتم استخدام الربع الأول من المعلم المتعامد والمتجانس وذلك لوجوب أن تكون قيم المتغيرين موجبة أو معدومـة، والذي يمثل أحد شروط البرمجة الخطية ألا وهو شرط عدم السلبية.

II. خطوات الحل وفق الطريقة البيانية

للوصول إلى حل مسائل البرمجة الخطية وفقا لهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- رسم محورين أحدهما أفقي وليكن x_1 والثاني عمودي وليكن x_2 على معلم متعامد ومتجانس.
- رسم القيود بعد تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بتحويل إشـارات ($\geq$،$\leq$) إلـى (=)، إن عمليـة التحويل هذه تجعل القيد في صيغة يمكن تمثيلها بخط مستقيم، ولمعرفة نقاط تقاطع الخـط المسـتقيم مـع المحور x_2 يفرض أن $x_1 = 0$، ثم يتم حل المعادلة بالنسبة إلى x_2. ولمعرفة نقطة تقاطع الخط المستقيم

مع المحور x_1 يفرض أن $x_2 = 0$ ، ثم يتم حل المعادلة بالنسبة إلى x_1، ويتم تحديد نقاط التقاطع على المحورين (x_1, x_2) ثم يتم الربط بينهما بخط مستقيم.

- تحديد منطقة الحلول الممكنة (Feasible Region Solutions)، وهي منطقة تقاطع مناطق الحل، والتي
- تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق جميع القيود في آن واحد، وأن شرط عدم السلبية تحدد منطقة الحل في الربع الأول من المعلم المتعامد والمتجانس.
- تحديد الحل الأمثل (Optimal Solution) من منطقة الحلول الممكنة، ويكون الحل هو أكبر قيمة في الشكل الناتج إذا كانت دالة الهدف تعظيم، وأصغر قيمة إذا كانت دالة الهدف تخفيض أو تقليل.

مثال (01): حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية

$$Max\ (Z) = 5x_1 + 6x_2$$

$$s/c \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

للقيام بحل البرنامج الخطي السابق نتبع الخطوات التالية:

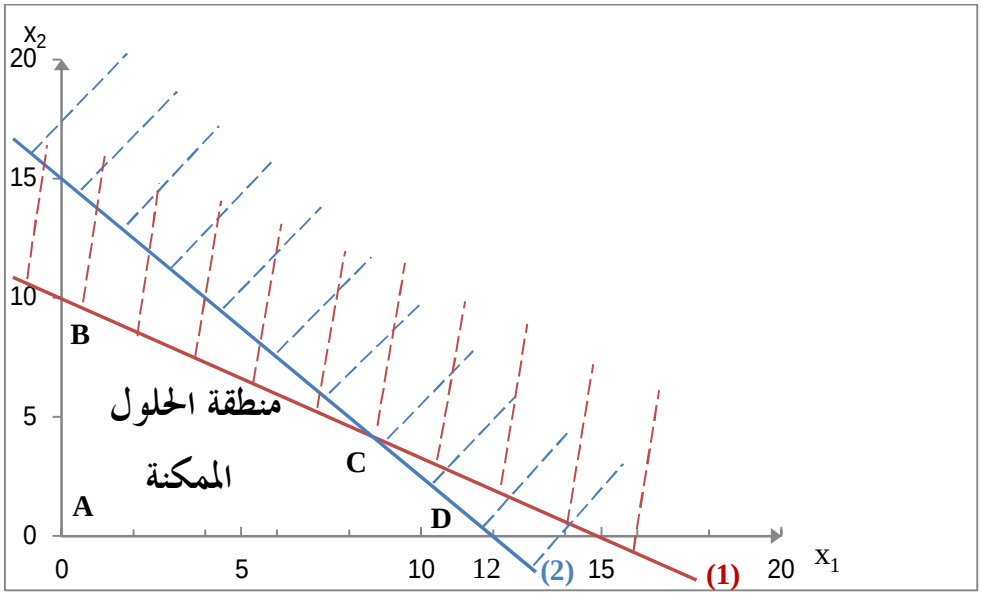
- تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$s/c \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 30 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 5x_1 + 4x_2 = 60 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

- افتراض القيم كل معادلة من المعادلتين السابقتين: ولذلك نستعين بالجدول التالي:

المعادلة	المتغير x_1	المتغير x_2
$2x_1 + 3x_2 = 30$	0	10
	15	0
$5x_1 + 4x_2 = 60$	0	15
	12	0

- رسم المعادلات على معلم متعامد ومتجانس كما هو موضح في الشكل التالي:



- تحديد منطقة الحلول الممكنة: من الشكل السابق يتضح بأن هذه المنطقة محدودة بالنقاط (A, B, C, D).
- تحديد الحل الأمثل: ولذلك يجب تحديد احداثيات النقاط الأربعة السابقة (A, B, C, D)، وهناك طريقتين لتحقيق ذلك:

- **الطريقة البيانية:** وذلك بإسقاط النقطة على محور الفواصل (x_1) ومحور التراتيب (x_2)، وهذا في حالة رسم الشكل البياني بدقة تامة، وفي حالة العكس نلجأ إلى الطريقة الجبرية.
- **الطريقة الجبرية:** لمعرفة إحداثيات أي نقطة لابد أولا من تحديد المستقيمين اللذان تقاطعا لتشكيلها وبعد ذلك نأخذ معادلتيهما ونحل الجملة كالتالي:

بالنسبة للنقاط (A, B, D) يمكن تحديد احداثياتها مباشرة من الرسم البياني باعتبارها تقع على محور الفواصل(x_1) أو محور التراتيب (x_2)، وبالتالي احداثياتها هي: D=(12,0), B=(0,10), A=(0,0)

أما النقطة C فهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين الذان يمثلان القيدين الأول والثاني، ولإيجاد احداثياتها لابد من حل جملة معادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 30 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) & \text{نضرب في (5)} \\ 5x_1 + 4x_2 = 60 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) & \text{نضرب في (2)} \end{cases}$$

نقوم بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد أن: $7x_2 = 30 \Rightarrow x_2 = \frac{30}{7}$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن: $2x_1 = \frac{120}{7} \Rightarrow x_1 = \frac{60}{7}$

إذن إحداثيات النقطة C هي: $C=(\frac{60}{7}, \frac{30}{7})$

ولإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي، نستخدم الجدول التالي:

النقاط	المتغير x_1	المتغير x_2	قيمة دالة الهدف
A=(0,0)	0	0	0
B=(0,10)	0	10	60
C=($\frac{60}{7}$, $\frac{30}{7}$)	$\frac{60}{7}$	$\frac{30}{7}$	$\frac{480}{7}$
D=(12,0)	12	0	60

بما أن دالة الهدف في حالة تعظيم فإن النقطة C=($\frac{60}{7}$, $\frac{30}{7}$) تمثل الحل الأمثل للبرنامج الخطي السابق بحيث قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = \frac{480}{7}, \qquad x_1 = \frac{60}{7}, \qquad x_2 = \frac{30}{7}$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** للحصول على أكبر ربح ممكن والمقدر بـ $\frac{480}{7}$ دج ($Z = \frac{480}{7}$) يجب على المؤسسة إنتاج $\frac{60}{7}$ وحدة من المنتوج الأول ($x_1 = \frac{60}{7}$)، وإنتاج $\frac{30}{7}$ وحدة من المنتوج الثاني ($x_2 = \frac{30}{7}$).

ملاحظات:

- تعني علامة ($\leq$) أن منطقة الحل على يمين أو أعلى الخط المستقيم الممثل للقيد.
- تعني علامة ($\geq$) أن منطقة الحل على يسار أو أسفل الخط المستقيم الممثل للقيد.
- إذا كانت جميع قيود البرنامج الخطي أقل أو يساوي ($\leq$) تكون منطقة الحل محصورة بين تقاطع المستقيمات ونقطة الأصل (0، 0).
- إذا كانت قيود البرنامج الخطي على شكل أكبر من أو أقل من أو يساوي، فإن منطقة الحل تكون أبعد من نقطة الأصل (0، 0).

مثال (02): حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$Min\ (Z) = x_1 + x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

للقيام بحل البرنامج الخطي السابق نتبع الخطوات التالية:

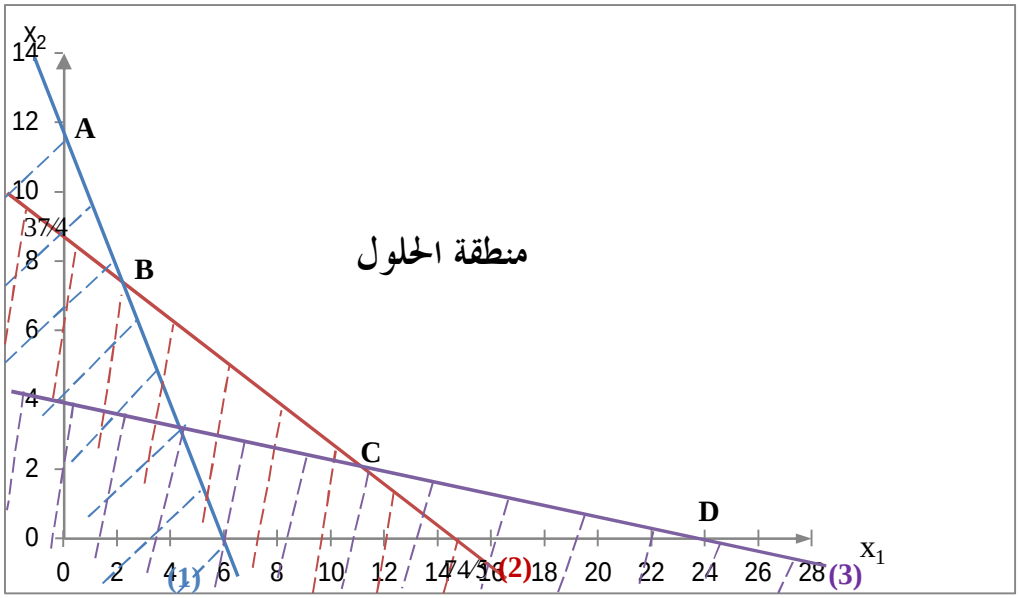
- تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$s/c \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 12 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ 5x_1 + 8x_2 = 74 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \\ x_1 + 6x_2 = 24 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

- افتراض قيم كل معادلة من المعادلتين السابقتين: ولذلك نستعين بالجدول التالي:

المعادلة	المتغير x_1	المتغير x_2
$2x_1 + 3x_2 = 30$	0	12
	6	0
$5x_1 + 4x_2 = 60$	0	$\frac{37}{4}$
	$\frac{74}{5}$	0
$x_1 + 6x_2 = 24$	0	4
	24	0

- رسم المعادلات على معلم متعامد ومتجانس كما هو موضح في الشكل التالي:



- تحديد منطقة الحلول الممكنة: من الشكل السابق يتضح بأن هذه المنطقة محدودة بالنقاط (A, B, C, D) .

- تحديد الحل الأمثل: ولذلك يجب تحديد احداثيات النقاط الأربعة السابقة (A, B, C, D):

بالنسبة للنقطتين (A,D) يمكن تحديد احداثياتهما مباشرة من الرسم البياني باعتبارها تقع على محور الفواصل (x_1) أو محور التراتيب (x_2)، وبالتالي احداثياتها هي: D=(24,0), A=(0,12).

أما النقطة B فهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين الذان يمثلان القيدين الأول والثاني، ولإيجاد احداثياتها لابد من حل جملة معادلتين كما يلي:

نضرب في (5) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 12 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ 5x_1 + 8x_2 = 74 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$ نضرب في (2)

$11x_2 = 88 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 8$ نقوم بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد أن:

بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن: $2x_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$

إذن إحداثيات النقطة B هي: $B=(2,8)$

أما النقطة C فهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين الذان يمثلان القيدين الثاني والثالث، ولإيجاد احداثياتها لابد من حل جملة معادلتين كما يلي:

نضرب في (5) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 = 74 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \\ x_1 + 6x_2 = 24 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$

نقوم بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد أن: $22x_2 = 46 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{23}{11}$

بالتعويض في المعادلة (3) نجد أن: $11x_1 = 126 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{126}{11}$

إذن إحداثيات النقطة C هي: $C=(\frac{126}{11},\frac{23}{11})$

ولإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي، نستخدم الجدول التالي:

النقاط	المتغير x_1	المتغير x_2	قيمة دالة الهدف
A=(0,12)	0	12	12
B=(2,8)	**2**	**8**	**10**
$C=(\frac{126}{11},\frac{23}{11})$	$\frac{126}{11}$	$\frac{23}{11}$	$\frac{149}{11}$
D=(24,0)	24	0	24

بما أن دالة الهدف في حالة تقليل فإن النقطة B=(2,8) تمثل الحل الأمثل للبرنامج الخطي السابق بحيث قيم الحل الأمثل هي: $Z = 10, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 8$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** لتحقيق أقل تكلفة ممكنة والمقدرة بـــ 10 دج ($Z = 10$) يجب على المؤسسة إنتاج وحدتين من المنتوج الأول ($x_1 = 2$)، و إنتاج 8 وحدات من المنتوج الثاني ($x_2 = 8$).

III. الحالات الخاصة للطريقة البيانية

إن مسائل البرمجة الخطية التي تم دراستها وحلها في الأمثلة السابقة باستخدام الطريقة البيانية، اتصفت بأن لها حل أمثل وحيد (Unique Optimal Solution)، إلا أنه تصادفنا في الحياة العملية بعض الحالات النادرة لمسائل أخرى للبرمجة الخطية ينبغي مراعاتها عند الحل:

1- حالة تعدد الحلول: وهي احتمال وجود أكثر من حل أمثل لمسائل البرمجة الخطية، كما يوضحه المثـــال التالي:

مثال (03): حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 4x_2$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

للقيام بحل البرنامج الخطي السابق نتبع الخطوات التالية:

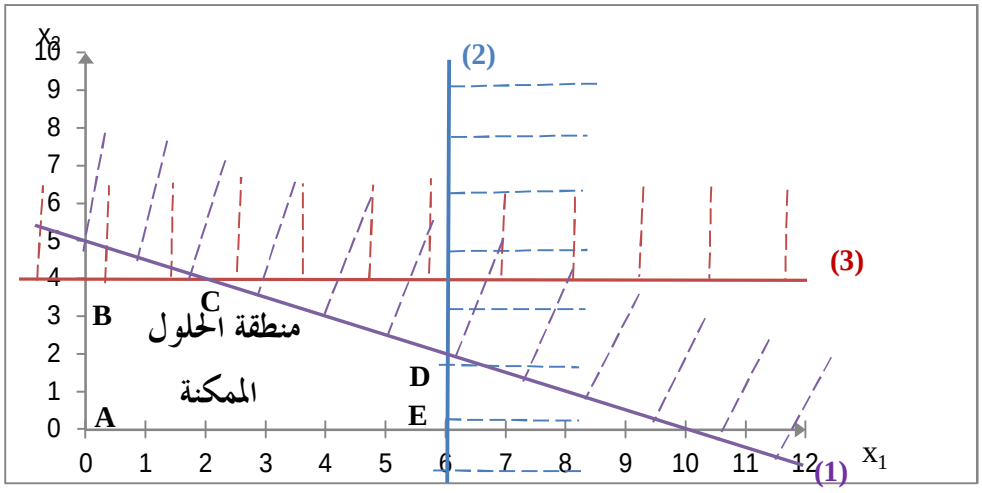
- تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 = 40 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x_1 = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x_2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

- افتراض قيم كل معادلة من المعادلتين السابقتين: ولذلك نستعين بالجدول التالي:

المعادلة	المتغير x_1	المتغير x_2
$4x_1 + 8x_2 = 40$	0	5
	10	0
$x_1 = 6$	6	0
$x_2 = 4$	0	4

- رسم المعادلات على معلم متعامد ومتجانس كما هو موضح في الشكل التالي:



- تحديد منطقة الحلول الممكنة:من الشكل السابق يتضح بأن هذه المنطقة محدودة بالنقاط (A, B, C, D,E).

- تحديد الحل الأمثل: ولذلك يجب تحديد احداثيات النقاط الثلاثة السابقة (A, B, C,D,E):

بالنسبة للنقطتين (A,B,E) يمكن تحديد احداثياتهما مباشرة من الرسم البياني باعتبارها تقع على محور الفواصل (x_1) أو محور التراتيب (x_2)، وبالتالي احداثياتها هي: A=(0,0), B=(0,4) , E=(6,0).

أما النقطة C فهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين الذان يمثلان القيدين الأول والثالث، ولإيجاد احداثياتها لابد من حل جملة معادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 = 40 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ x_2 = 4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

بتعويض المعادلة (3) في المعادلة (1) نجد أن: $4x_1 = 8 \Rightarrow x_1 = 2$

إذن إحداثيات النقطة C هي: C=(2,4)

أما النقطة D فهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين الذان يمثلان القيدين الأول والثاني، ولإيجاد احداثياتها لابد من حل جملة معادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 = 40 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ x_1 = 6 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

بتعويض المعادلة (2) في المعادلة (1) نجد أن: $8x_2 = 16 \Rightarrow x_1 = 2$ إذن إحداثيات النقطة D=(6,2)

ولإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي، نستخدم الجدول التالي:

النقاط	المتغير x_1	المتغير x_2	قيمة دالة الهدف
A=(0,0)	0	0	0
B=(0,4)	0	4	16
C=(2,4)	**2**	**4**	**20**
D=(6,2)	**6**	**2**	**20**
E=(6,0)	6	0	12

يلاحظ من خلال الجدول السابق أن لهذا البرنامج الخطي أكثر من حل أمثل (النقطتين C وD تعطيان نفس القيمة لدالة الهدف 20)، والواقع أن كل النقاط التي تقع على القطعة [CD] تعطي نفس القيمة لدالة الهدف، وتصادف هذه الحالة عندما يكون المستقيم الممثل لدالة الهدف موازيا لأحد مستقيمات القيود الهيكلية في سقف منطقة الحل الممكن باتجاه اليمين في حالة التعظيم أو في أرضية منطقة الحل الممكن في حالة التخفيض، حيث يكون ميل مستقيم دالة الهدف وميل مستقيم هذا القيد متساويان.

2- حالة حلول غير محدودة: وتكون منطقة الحل في هذه الحالة مفتوحة وليست مغلقة، كما يوضحه المثـــال التالي:

مثال (04): حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$Max\ (Z) = 10x_1 + 20x_2$$

$$s/c \quad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 75 \\ x_2 \leq 12 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

للقيام بحل البرنامج الخطي السابق نتبع الخطوات التالية:

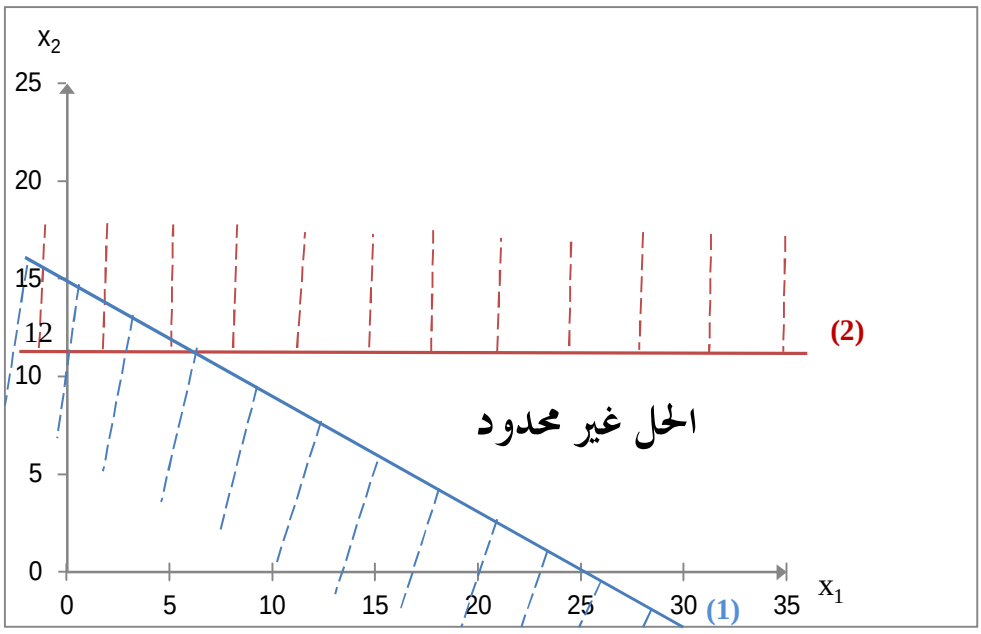
- تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$s/c \quad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 75 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x_2 = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

- افتراض قيم كل معادلة من المعادلتين السابقتين: ولذلك نستعين بالجدول التالي:

المعادلة	المتغير x_1	المتغير x_2
$3x_1 + 5x_2 = 75$	0	15
	25	0
$x_2 = 12$	0	12

- رسم المعادلات على معلم متعامد ومتجانس كما هو موضح في الشكل التالي:



من الشكل السابق نلاحظ أن قيمة x_2 ثابتة وتساوي 12 ولجميع قيم x_1، فإذا كانت $x_1 = 25$ فإن قيمة دالة الهدف $Z = 490$، وبما أن دالة الهدف هي دالة تعظيم فكلما زادت قيمة x_1 تزداد قيمة دالة الهدف، فإذا ارتفعت قيمة x_1 بمقدار 10 مثلا، فإن دالة الهدف ترتفع بمقدار 250، وبناءا على ذلك نجد أن الحل غير محدود.

3- حالة عدم وجود حلول: وهي الحالة التي تكون فيها القيود متناقضة، حيث لا تتحقق لنا أي منطقة للحل الأمثل، كما هو موضح في المثال التالي:

مثال (05): حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$Max\ (Z) = 20x_1 + 15x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 50 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

للقيام بحل البرنامج الخطي السابق نتبع الخطوات التالية:

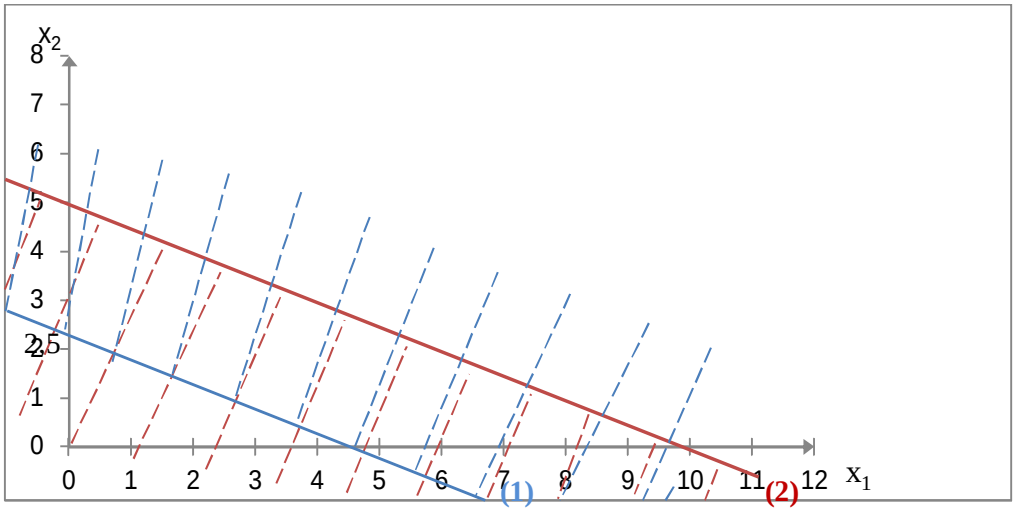
- تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 25 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 5x_2 + 10x_2 = 50 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

- افتراض قيم كل معادلة من المعادلتين السابقتين: ولذلك نستعين بالجدول التالي:

المعادلة	المتغير x_1	المتغير x_2
$5x_1 + 10x_2 = 25$	0	2,5
	5	0
$5x_1 + 10x_2 = 50$	0	5
	10	0

- رسم المعادلات على معلم متعامد ومتجانس كما هو موضح في الشكل التالي:



نلاحظ من خلال الشكل السابق أن القيدين متعاكسين و لا يتقاطعان نهائيا، وبذلك لا نستطيع الحصول علـــى حل مقبول لهذه المسألة.

4- حالة حيادية أحد القيود: ويظهر في هذه الحالة أحد القيود كقيد فائض لا حاجة له، وليس لـــه أي تـــأثير على الحل، ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالي:

<u>مثال (06):</u> حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$Max\ (Z) = 12x_1 + 8x_2$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 9x_2 \leq 1800 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 400 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

<u>الحل:</u>

للقيام بحل البرنامج الخطي السابق نتبع الخطوات التالية:

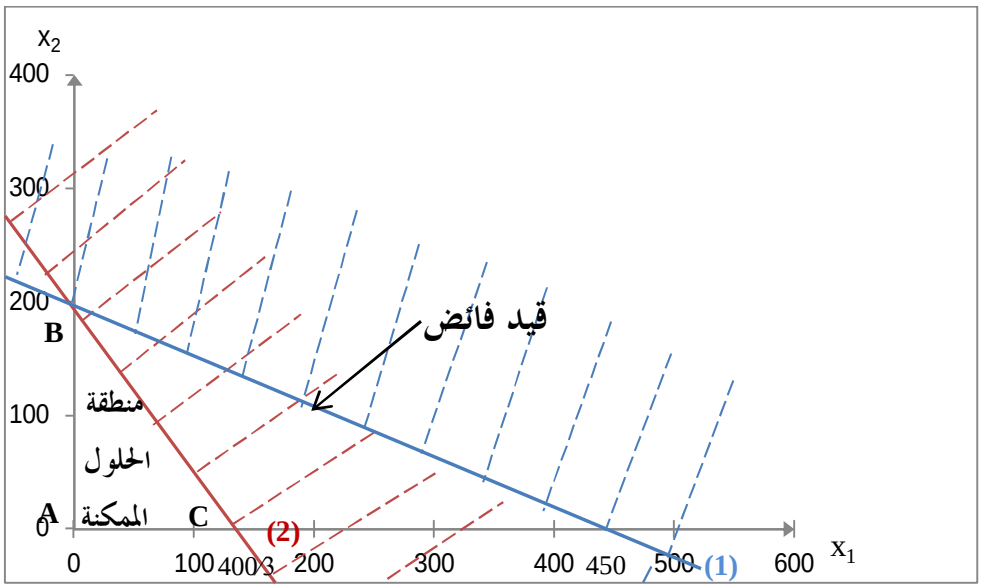
- تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 9x_2 = 1800 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 3x_2 + 2x_2 = 400 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

افتراض قيم كل معادلة من المعادلتين السابقتين: ولذلك نستعين بالجدول التالي:

المعادلة	المتغير x_1	المتغير x_2
$4x_1 + 9x_2 = 1800$	0	200
	450	0
$3x_1 + 2x_2 = 400$	0	200
	$\frac{400}{3}$	0

- رسم المعادلات على معلم متعامد ومتجانس كما هو موضح في الشكل التالي:



نلاحظ من خلال الشكل السابق أن الحل الأمثل هو النقطة B=(0,200)، وأن القيد الأول هو قيد فائض، ويسمى الحل في هذه الحالة حلا منحلا.

V. تمارين محلولة

التمرين الأول: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ (Z) = 15x_1 + 20x_2$$

$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ x_1 + 2x_2 \geq 160 \\ x_1 \leq 60 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

❖ **المطلوب:** - حل البرنامج الخطي السابق باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

للقيام بحل البرنامج الخطي السابق نتبع الخطوات التالية:

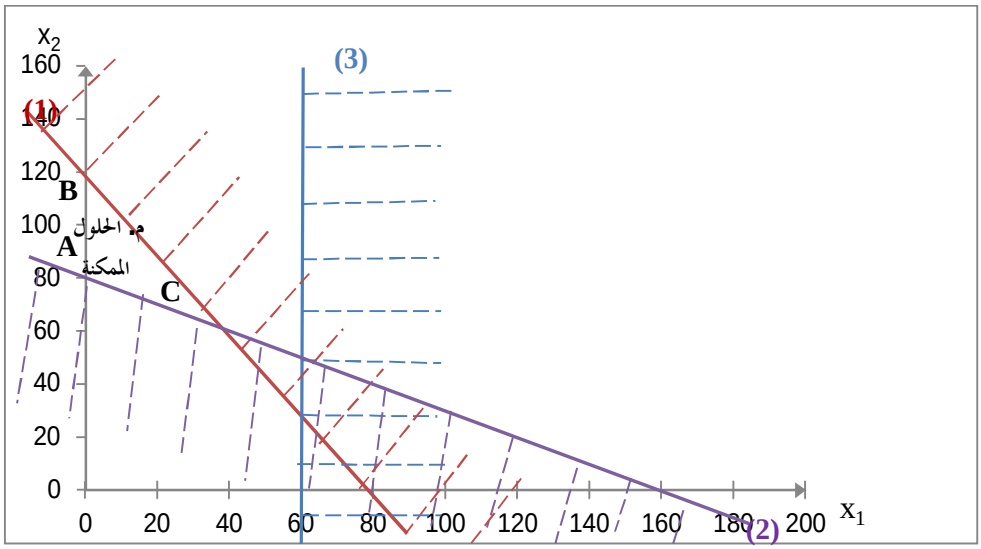
- تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 240 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x_1 + 2x_2 = 160 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x_1 = 60 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

- افتراض قيم كل معادلة من المعادلتين السابقتين: ولذلك نستعين بالجدول التالي:

المعادلة	المتغير x_1	المتغير x_2
$3x_1 + 2x_2 = 240$	0	120
	80	0
$x_1 + 2x_2 = 160$	0	80
	160	0
$x_1 = 60$	60	0

- رسم المعادلات على معلم متعامد ومتجانس كما هو موضح في الشكل التالي:



- تحديد منطقة الحلول الممكنة:من الشكل البياني السابق يتضح بأن المنطقة محدودة بالنقاط (A, B, C) .

- تحديد الحل الأمثل: ولذلك يجب تحديد احداثيات النقاط الثلاثة السابقة (A, B, C):

بالنسبة للنقطتين (A,B) يمكن تحديد احداثياتهما مباشرة من الرسم البياني باعتبارها تقع على محور الفواصل (x_1) أو محور التراتيب (x_2)، وبالتالي احداثياتها هي: B=(0,120) A=(0,80), .

أما النقطة C فهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين الذان يمثلان القيدين الأول والثاني، ولإيجاد احداثياتها لابد من حل جملة معادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 240 \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ x_1 + 2x_2 = 160, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

نضرب في (3)

نقوم بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد أن: $4x_2 = 240 \Rightarrow x_2 = 60$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن: $3x_1 = 120 \Rightarrow x_1 = 40$

إذن إحداثيات النقطة C هي: C=(40, 60)

ولإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي، نستخدم الجدول التالي:

النقاط	المتغير x_1	المتغير x_2	قيمة دالة الهدف
A=(0,80)	0	80	1800
B=(0,120)	**0**	**120**	**2400**
C=(40,60)	40	60	1600

بما أن دالة الهدف في حالة تعظيم فإن النقطة B=(0,120) تمثل الحل الأمثل للبرنامج الخطي السابق بحيث قيم الحل الأمثل هي: $Z = 2400, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 120$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** للحصول على أكبر ربح ممكن والمقدر بـــ 2400 دج $(Z = 2400)$ يجب على المؤسسة عدم إنتاج أي وحدة من المنتوج الأول $(x_1 = 0)$، و إنتاج 120 وحدة من المنتوج الثاني $(x_2 = 120)$.

<u>التمرين الثاني:</u> إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ (Z) = 6x_1 + 4x_2$$

$$s/c \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 42 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 2 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

❖ **<u>المطلوب:</u>** - حل البرنامج الخطي السابق باستخدام الطريقة البيانية.

<u>الحل:</u>

للقيام بحل البرنامج الخطي السابق نتبع الخطوات التالية:

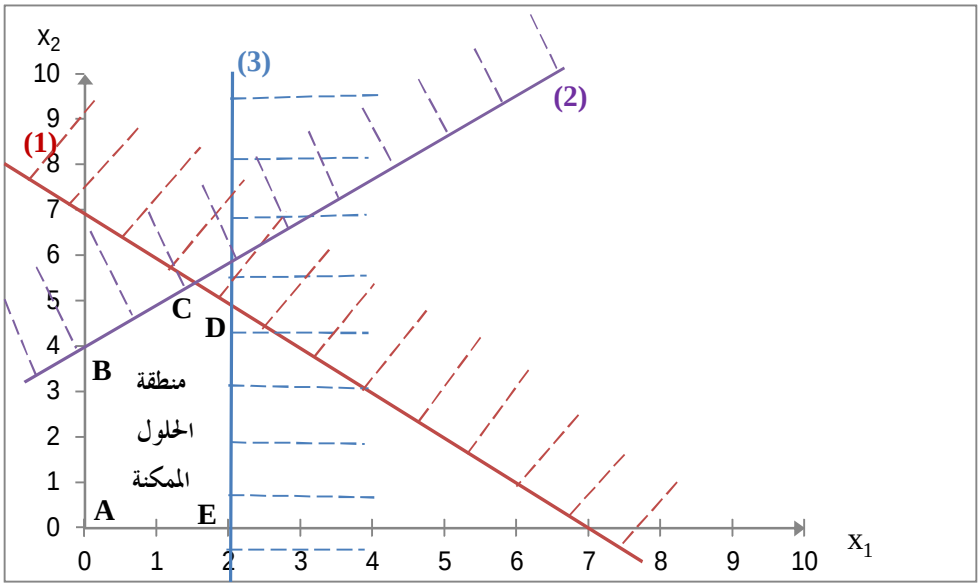
- تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$s/c \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 = 42 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -x_1 + x_2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x_1 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

- افتراض قيم كل معادلة من المعادلتين السابقتين: ولذلك نستعين بالجدول التالي:

المعادلة	المتغير x_1	المتغير x_2
$6x_1 + 6x_2 = 42$	0	7
	7	0
$-x_1 + x_2 = 4$	0	4
	1	5
$x_1 = 2$	2	0

- رسم المعادلات على معلم متعامد ومتجانس كما هو موضح في الشكل التالي:



- تحديد منطقة الحلول الممكنة: من الشكل البياني السابق يتضح بأن هذه المنطقة محدودة بالنقاط (A, B, C, D,E).

- تحديد الحل الأمثل: ولذلك يجب تحديد احداثيات النقاط الثلاثة السابقة (A, B, C,D,E):

بالنسبة للنقاط (A,B,E) يمكن تحديد احداثياتها مباشرة من الرسم البياني باعتبارها تقع على محور الفواصل (x_1) أو محور التراتيب (x_2)، وبالتالي احداثياتها هي: E=(2,0) , B=(0,4), A=(0, 0).

أما النقطة C فهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين الذان يمثلان القيدين الأول والثاني، ولإيجاد احداثياتها لابد من حل جملة معادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 = 42 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ -x_1 + x_2 = 4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

نضرب في (-6)

نقوم بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد أن: $-12x_2 = -66 \Rightarrow x_2 = \frac{11}{2}$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن: $6x_1 = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$

إذن إحداثيات النقطة C هي: $C=(\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$

أما النقطة D فهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين الذان يمثلان القيدين الأول والثالث، ولإيجاد احداثياتها لابد من حل جملة معادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 = 42 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ x_1 = 2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

بتعويض المعادلة (3) في المعادلة (1) نجد أن: $6x_1 = 30 \Rightarrow x_1 = 5$

إذن إحداثيات النقطة D هي: D=(2,5)

ولإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي، نستخدم الجدول التالي:

النقاط	المتغير x_1	المتغير x_2	قيمة دالة الهدف
A=(0,0)	0	0	0
B=(0,4)	0	4	16
C=($\frac{3}{2}$, $\frac{11}{2}$)	$\frac{11}{2}$	$\frac{3}{2}$	31
D=(2,5)	**2**	**5**	**32**
E=(2,0)	2	0	12

بما أن دالة الهدف في حالة تعظيم فإن النقطة D=(2,5) تمثل الحل الأمثل للبرنامج الخطي السابق بحيث قيم الحل الأمثل هي: $Z = 32, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** للحصول على أكبر ربح ممكن والمقدر بـــ 32 دج ($Z = 32$) يجب علـــى المؤسسة إنتاج وحدتين من المنتوج الأول ($x_1 = 2$)، وإنتاج 5 وحدات من المنتوج الثاني ($x_2 = 5$).

التمرين الثالث: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Min\ (Z) = 5x_1 + 15x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 30 \\ x_2 \leq 2 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

❖ **المطلوب:** - حل البرنامج الخطي السابق باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

للقيام بحل البرنامج الخطي السابق نتبع الخطوات التالية:

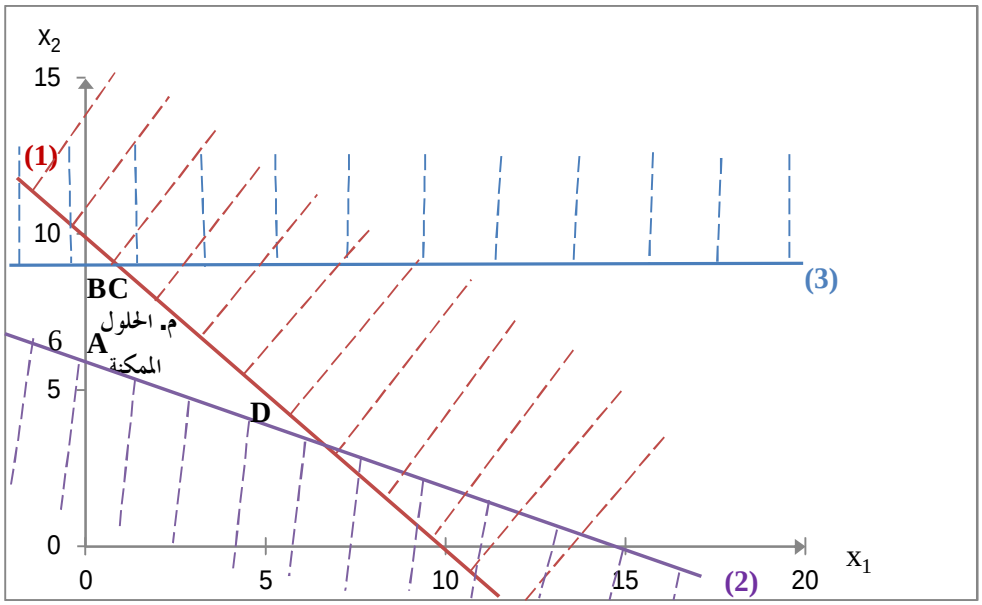
- تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 20 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x_1 + 5x_2 = 30 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x_2 = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

- افتراض قيم كل معادلة من المعادلتين السابقتين: ولذلك نستعين بالجدول التالي:

المعادلة	المتغير x_1	المتغير x_2
$2x_1 + 2x_2 = 20$	0	10
	10	0
$2x_1 + 5x_2 = 30$	0	6
	15	0
$x_2 = 9$	0	9

- رسم المعادلات على معلم متعامد ومتجانس كما هو موضح في الشكل التالي:



- تحديد منطقة الحلول الممكنة: من الشكل البياني السابق يتضح بأن هذه المنطقة محدودة بالنقاط (A, B, C, D).

- تحديد الحل الأمثل: ولذلك يجب تحديد احداثيات النقاط الثلاثة السابقة (A, B, C,D):

بالنسبة للنقاط (A,B) يمكن تحديد احداثياتها مباشرة من الرسم البياني باعتبارها تقع على محـــور الفواصـــل (x_1) أو محور التراتيب (x_2)، وبالتالي احداثياتها هي: B=(0,9) ,A=(0, 6).

أما النقطة C فهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين الذان يمثلان القيدين الأول والثالث، ولإيجاد احـــداثياتها لابـــد من حل جملة معادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 20 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ x_2 = 9 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

بتعويض المعادلة (3) في المعادلة (1) نجد أن: $2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$

إذن إحداثيات النقطة C هي: C=(1, 9)

أما النقطة D فهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين الذان يمثلان القيدين الأول والثاني، ولإيجاد احداثياتها لابد من حل جملة معادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 20 \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ 2x_1 + 5x_2 = 30 \dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

نقوم بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد أن: $3x_2 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{10}{3}$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن: $2x_1 = \frac{40}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{20}{3}$

إذن إحداثيات النقطة D هي: $D=(\frac{20}{3}, \frac{10}{3})$

ولإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي، نستخدم الجدول التالي:

النقاط	المتغير x_1	المتغير x_2	قيمة دالة الهدف
A=(0,6)	0	6	90
B=(0,9)	0	4	135
C=(1,9)	1	9	140
$\mathbf{D=(\frac{20}{3}, \frac{10}{3})}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{250}{3}$

بما أن دالة الهدف في حالة تعظيم فإن النقطة $D=(\frac{20}{3}, \frac{10}{3})$ تمثل الحل الأمثل الوحيد للبرنامج الخطي السابق بحيث قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = \frac{250}{3}, \quad x_1 = \frac{20}{3}, \quad x_2 = \frac{10}{3}$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** لتحقيق أقل تكلفة ممكنة والمقدرة بـ $\frac{250}{3}$ دج $(Z = \frac{250}{3})$ يجب على المؤسسة إنتاج $\frac{20}{3}$ وحدة من المنتوج الأول $(x_1 = \frac{20}{3})$، وإنتاج $\frac{10}{3}$ وحدة من المنتوج الثاني $(x_2 = \frac{10}{3})$.

V. تمارين غير محلولة

<u>التمرين الأول:</u> حل البرامج الخطية الممكنة من بين تمارين المحور الأول باستخدام الطريقة البيانية.

<u>التمرين الثاني:</u> حل البرامج الخطية التالية باستخدام الطريقة البيانية:

$Max(Z) = 30x_1 + 10x_2$ $s/c \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 4x_1 + 2x_3 \leq 20 \\ x_2 \geq 80 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 115 , x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 7$	$Max(Z) = 3x_1 + 2x_2$ $s/c \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 4 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 20 , x_1 = 5, x_2 = \frac{5}{2}$
$Max(Z) = 3x_1 + 2x_2$ $s/c \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 8, x_1 = 2, x_2 = 1$	$Max(Z) = -2x_1 - x_2$ $s/c \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 8, x_1 = 2, x_2 = 0$
$Min(Z) = 3x_1 + 8x_2$ $s/c \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 3 \\ x_1 \leq 80 \\ 4x_1 + 3 \leq 3 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = \frac{177}{5} , x_1 = 7, x_2 = \frac{9}{5}$	$Min(Z) = 2x_1 + 3x_2$ $s/c \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 2 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 8 , x_1 = 3, x_2 = 2$
$Min(Z) = x_1 + 2x_2$ $s/c \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 2 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 10, x_1 = 6, x_2 = 2$	$Min(Z) = 42x_1 + 8x_2$ $s/c \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 18 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 8, x_1 = 2, x_2 = 0$

المحور الثالث: حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة (السمبلكس)
Linear Programmig – The Simplex Method

لا يمكن استخدام الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي أكثر من متغيرين، وبالمقابل لو نظرنا إلى المسائل الواقعية نجد أن معظمها في الواقع العملي يحتوي على العديد من المتغيرات مما يصعب استخدام الطريقة البيانية في الحل، وهو ما استلزم إيجاد طرق أخرى للتعامل مع مثل هذه المسائل، ومن بين هذه الطرق الطريقة المبسطة أو السمبلكس (The Simplex Method).

I. مفهوم الطريقة المبسطة (السمبلكس)

طريقة السمبلكس هي وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشاكل البرمجة الخطية بصورة عامة، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبريا مهما كان عدد المتغيرات، وهي الأكثر استخداما لحل النماذج الرياضية.

وتعود البدايات التاريخية لتطبيقها إلى الجهود المبذولة من طرف العالم (Dantzig) سنة 1947، فبالإضافة إلى صلاحية هذه الطريقة في التعامل مع المسائل ذات المتغيرات الكثيرة، فإنه يوجد العديد من برامج الإعلام الآلي التي تعمل وفق هذه الطريقة، والتي يمكن أن تستخدم لحل مسائل البرمجة الخطية ذات الأبعاد الكبيرة (عدد كبير من المتغيرات وعدد كبير من القيود).

ويتم إيجاد حل لمشكلات البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة وفقا لثلاث مراحل أو خطوات أساسية ومتسلسلة، هذه الخطوات تتمثل في:

1- كتابة الشكل المعياري أو القياسي للبرنامج الخطي (Standard Form).

2- إيجاد الحل الأساس أو الأولي (Feasible Solution).

3- تحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل (Best Solution).

II. حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة-السمبلكس في حالة التعظيم (Maximizaion)

لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بموجب طريقة السمبلكس في حالة التعظيم، نتبع الخطوات التالية:

1- كتابة الشكل المعياري أو القياسي للبرنامج الخطي: ويقصد بها تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك

بإضافة متغيرات، تسمى بمتغيرات الفجوة أو المتغيرات الخاملة أو الراكدة Slack Variable، ويرمز لها بـ (S_i) والتي تمثل مقدار الطاقة الغير المستغلة، أي الفرق بين الإمكانيات المتاحة والمستغلة في الإنتاج ويمكن إظهار هذه الخطوة باستخدام المثال رقم (01) من المحور الثاني كما يلي:

$2\,x_1 + 3x_2 + \boldsymbol{S_1} = 30$

$5x_1 + 4\,x_2 + \boldsymbol{S_2} = 60$

$(x_1 . x_2 . S_1 . S_2\ ) \geq 0$

وكذلك تحويل دالة الهدف إلى دالة صفرية بالشكل التالي:

$Max(Z) = 5x_1 + 6x_2 + \boldsymbol{0}.\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{0}.\boldsymbol{S_2}$ ثم: $Z - 5x_1 - 6x_2 - \boldsymbol{0}.\boldsymbol{S_1} - \boldsymbol{0}.\boldsymbol{S_2} = 0$

2- إيجاد الحل الأساسي (الأولي): يتم تكوين الحل الأساسي من خلال جدول الذي سيتم داخل حل المشكلة الاقتصادية، حيث تمثل متغيرات الفجوة متغيرات أساسية **(Basic Variables)** والتي تحقق مصفوفة أحادية، والمتغيرات الأصلية متغيرات غير أساسية **(Non-Basic Variables)**، كما يلي لنفس المثال:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**				b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	S_1	S_2		
S_1	2	**3**	1	0	30	10
S_2	5	4	0	1	60	15
Z	−5	−6	0	0	0	

ويلاحظ أن عدد أعمدة مصفوفة المتغيرات الأصلية يساوي عدد المتغيرات الأصلية (x_1, x_2) ، وأن عدد صفوفها يساوي عدد القيود الهيكلية بالمشكلة، فتصبح مصفوفة المتغيرات الأصلية للمثال من النوع (2×2)، كما يلاحظ أن عدد أعمدة مصفوفة متغيرات الفجوة يساوي عدد هذه المتغيرات وعدد صفوفها يساوي عدد القيود الهيكلية للمشكلة فتصبح مصفوفة متغيرات الفجوة للمثال من النوع (2×2).

أما عمود الطاقة المتوفرة فيوضع على يسار مصفوفة المتغيرات ويظهر به مقدار المتغير الداخل في الحل، بينما يعلو المصفوفتين السابق الإشارة اليهما صفان بأدناهما تظهر المتغيرات الأساسية وغير الأساسية، أي التغير الذي يخص العمود المعني، وبأسفلهما يظهر مقدار ربح الوحدة للمتغير المعني في السطر Z، ويظل هذان الصفان دون أي تغيير ولكل حل.

3- تحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل: وتشمل الخطوات التالية:

- **تحديد المتغير الداخل (عمود الارتكاز):** لغرض تحديد المتغير الداخل ومادامت المشكلة هي حالة تعظيم

فإننا نبحث عن أصغر قيمة سالبة (في حالة كون دالة الهدف تخفيض فإننا نبحث عن أكبر قيمة موجبة) في سطر دالة الهدف Z، وفي نفس المثال هي القيمة (6-) والتي تمثل معامل المتغير (x_2)، لذلك فإن (x_2) سيكون المتغير الداخل وعمود (x_2) يسمى بالعمود الداخل.

- **تحديد المتغير الخارج (سطر الارتكاز):** يتم تحديد المتغير الخارج بعد قسمة عناصر العمود الثابت (b_i) على العناصر المناظرة له في العمود الداخل (العمود x_2 في هذا المثال)، واختيار أصغر قيمة موجبة، مع إهمال المتغيرات ذات المعاملات السالبة والصفرية عدا دالة الهدف، وفي نفس المثال فإن أصغر قيمة موجبة هي 10، لذلك فإن السطر S_1 هو المتغير الخارج.

- **تحديد عنصر الارتكاز:** وهو العنصر الذي يتقاطع عنده سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز، وفي نفس المثال فإن عنصر الارتكاز هو 3.

- **إيجاد قيم السطر المحوري (سطر الارتكاز القديم في الجدول الجديد):** ويتم ذلك من خلال قسمة قيم السطر للمتغير الخارج على عنصر الارتكاز، وذلك للحصول على السطر المحوري، وفي مثالنا نقسم قيم السطر للمتغير الخارج S_1 على عنصر الارتكاز 3، وذلك للحصول على السطر المحوري x_2، وهو في هذه الحالة كما يلي:

$$\frac{2}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 10$$

- **إيجاد قيم باقي أسطر الجدول**: لإيجاد قيم بقية أسطر جدول الحل الجديد نستخدم الصيغة الآتية:

عناصر السطر الجديد = عناصر السطر القديم – (عنصر السطر القديم الواقع في عمود الارتكاز القديم x عناصر سطر الارتكاز القديم في الجدول الجديد)

$$new\,(S_2) = [5 \quad 4 \quad 0 \quad 1 \quad 30] - (4) * [\frac{2}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 10]$$
$$= \left[\frac{2}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 10\right]$$
$$new\,(Z) = [-5 \quad -6 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - (-6) * [\frac{2}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 10]$$
$$= [-1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 60]$$

ملاحظات:

- عناصر السطر Z يتم إيجادها بنفس الطريقة، إذ نقوم بضرب عنصر السطر Z والواقع في عمود المتغير الداخل في عناصر السطر المحوري ثم طرحها من عناصر السطر Z القديمة.
- الأسطر التي تكون فيها قيمة العنصر الموجود في نفس عمود الارتكاز تساوي الصفر، تسجل بنفس القيم في جدول الحل الموالي.

نسجل القيم الجديدة في جدول الحل الجديد كما يلي:

Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	S_1	S_2		
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10	10
S_2	$\boxed{\frac{7}{3}}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	20	15
Z	-1	0	2	0	60	

- **اختبار أمثلية الحل والوصول إلى الحل الأمثل:** يعتبر الحل أمثلا (Optimal Solution) في حالة التعظيم (Maximization)، عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة موجبة أو معدومة أي ($\Sigma Z \geq 0$)، والعكس صحيح في حالة التخفيض (Minimization)، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد المعاملات في دالة الهدف سالبة، فهذا يعني عدم الوصول إلى الحل الأمثل، وبالتالي نستمر بالحل بنفس الإجراءات السابقة لتحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل.

وهو ما لم يتحقق بعد في هذا المثال بسبب وجود قيمة سالبة ($-1 \geq 0$) في السطر الجديد لـ Z، وبالتالي يجب تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة، نحصل على جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	
x_2	0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{30}{7}$
x_1	1	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{60}{7}$
Z	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{480}{7}$

نلاحظ أن كل معاملات دالة الهدف أصبحت موجبة أو معدومة أي $\Sigma Z \geq 0$، وبالتالي قد وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = \frac{480}{7}, \quad x_1 = \frac{60}{7}, \quad x_2 = \frac{30}{7}, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** للحصول على أكبر ربح ممكن والمقدر بـ $\frac{480}{7}$ دج ($Z = \frac{480}{7}$) يجب على المؤسسة إنتاج $\frac{60}{7}$ وحدة من المنتوج الأول ($x_1 = \frac{60}{7}$)، و إنتاج $\frac{30}{7}$ وحدة من المنتوج الثاني ($x_2 = \frac{30}{7}$)،

مع عدم بقاء أي طاقة عاطلة في القيدين الأول والثاني ($S_1 = 0,\ S_2 = 0$)[1] ، وأن بزيادة استغلال وحدة واحدة في القيد الأول سيؤدي إلى زيادة الربح بـ $\frac{10}{7}$ من خلال زيادة إنتاج $\frac{5}{7}$ من المنتوج الثاني، وتخفيض الإنتاج بـ $\frac{4}{7}$ من المنتوج الأول. وأن بزيادة استغلال وحدة واحدة في القيد الثاني سيؤدي إلى زيادة الربح بـ $\frac{3}{7}$ من خلال زيادة إنتاج $\frac{3}{7}$ من المنتوج الأول، وتخفيض الإنتاج بـ $\frac{2}{7}$ من المنتوج الثاني، وهذه هي خطة الإنتاج المثلى.

مثال (02): أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلكس:

$$Max(Z) = 6x_1 + 8x_2 + 4x_3$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 3\,x_2 \leq 6 \\ x_1 + 3\,x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 1 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

للقيام بعملية الحل نتبع الخطوات التالية:

1- كتابة الشكل المعياري للبرنامج الخطي: إذ يصبح البرنامج على الشكل التالي:

$$Z - 6x_1 - 8x_2 - 4x_3 - 0.S_1 - 0.S_2 - 0.S_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + S_1 = 2$$
$$x_1 + 3x_3 + S_2 = 6$$
$$x_2 + S_3 = 1$$
$$(x_1 . x_2 . x_3 . S_1 . S_2 . S_3) \geq 0$$

2- إيجاد الحل الأساسي (الأولي): ويكون جدول الحل الأساسي كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
S_1	1	1	0	1	0	0	2	2
S_2	1	0	3	0	1	0	6	∞
S_3	0	**1**	0	0	0	1	1	1
Z	-6	-8	-4	0	0	0	0	

[1]- نفس النتائج المتحصل عليها عند استخدام الطريقة البيانية في الفصل الثاني.

3- تحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل: وتشمل الخطوات التالية:

- **تحديد المتغير الداخل (سطر الارتكاز):** مادامت المشكلة هي حالة تعظيم فإن معامل المتغير هي القيمة (-8)، و (x_2) هو المتغير الداخل.
- **تحديد المتغير الخارج (عمود الارتكاز):** إن أصغر قيمة موجبة هي 1، لذلك فإن السطر S_3 هو المتغير الخارج، وأن العنصر 1 هو العنصر المحوري (عنصر الإرتكاز)، وهو العنصر الذي يتقاطع عنده سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز.
- **إيجاد قيم السطر المحوري (سطر الارتكاز القديم في الجدول الجديد):** نقوم بقسمة قيم السطر للمتغير الخارج S_2 على العنصر المحوري 1، وذلك للحصول على السطر المحوري x_2 :

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

- **إيجاد قيم بقية أسطر الجدول:** لإيجاد قيم بقية أسطر جدول الحل الجديد نستخدم الصيغة السابقة:

$$new\ (S_1) = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2] - (1) * [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$$
$$= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1]$$
$$new\ (Z) = [-6 \quad -8 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - (-8) * [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$$
$$= [-6 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \quad 8 \quad 8]$$

نسجل هذه القيم في جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i	b_i/x_1
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
S_1	**1**	0	0	1	0	−1	1	1
S_2	1	0	3	0	1	0	6	6
x_2	0	1	0	0	0	1	1	∞
Z	−6	−0	−4	0	0	8	8	

- **اختبار أمثلية الحل والوصول إلى الحل الأمثل:** يعتبر الحل أمثلا في حالة التعظيم (حالة مثالنا)، عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة موجبة أو معدومة أي $\Sigma Z \geq 0$، وهو ما لم يتحقق بعد بسبب وجود قيمة سالبة $(-4 \geq 0)$ في السطر الجديد لـ Z، وبالتالي يجب تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة، نحصل على جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i	b_i/x_3
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_1	1	0	0	1	0	-1	1	∞
S_2	0	0	**3**	-1	1	1	5	$\frac{5}{3}$
x_2	0	1	0	0	1	1	1	∞
Z	0	0	-4	6	0	2	14	

نلاحظ أن شرط أمثلية الحل لم يتحقق بعد بسبب وجود قيمة سالبة $(-4 \geq 0)$ في السطر الجديد لـ Z، وبالتالي يجب تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة، نحصل على جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_1	1	0	0	1	0	-1	1
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_2	0	1	0	0	0	1	1
Z	0	0	0	$\frac{14}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{62}{3}$

نلاحظ أن كل معاملات دالة الهدف أصبحت موجبة أو معدومة أي $\Sigma Z \geq 0$، وبالتالي قد وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = \frac{62}{3}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{5}{3}, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** لحصول المؤسسة على أكبر ربح ممكن والمقدر بـ $\frac{62}{3}$ دج $(Z=\frac{62}{3})$ يجب على المؤسسة إنتاج وحدة واحدة من المنتوج الأول $(x_1 = 1)$، وإنتاج وحدة واحدة من المنتوج الثاني $(x_2 = 1)$، وإنتاج $\frac{5}{3}$ وحدة من المنتوج الثالث $(x_3 = 20)$، مع عدم بقاء طاقة عاطلة في القيود الثلاثة $(S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0)$.

III- حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة- السمبلكس في حالة التخفيض (Minimizaion)

لاحظنا في المثالين السابقين استخدام متغيرات الفجوة (Slack Variables) في حالة كون القيود على شكل متراجحات من النوع أقل أو يساوي (≤) ودالة الهدف في حالة التعظيم (Maximization)، ولكن هناك الكثير من مسائل البرمجة الخطية التي لا يمكن فيها إيجاد الحل الأساسي باستخدام متغيرات الفجوة، إن هذه المسائل تتضمن على الأقل قيد من النوع أكبر أو يساوي (≥) أو مساواة (=) أو دالة هدف في حالة التخفيض (Minimization)، في هذه الحالة نضيف إلى القيود من النوع أكبر أو يساوي أو مساواة متغيرات أخرى تسمى بالمتغيرات الإصطناعية (Artificial Variables)، ويتم حل هذا النوع من المسائل بواسطة أحد الطريقتين التاليتين:

- طريقة (M) الكبيرة (Big-M Method).
- طريقة المرحلتين (Two-Phase Method).

ملاحظة:

يتم استخدام هاتين الطريقتين في حالة التعظيم (Maximization)، إذا تضمن البرنامج الخطي قيود بصيغة أكبر من أو يساوي (≥) أو بصيغة المساواة (=)، أو قيود خليط من كل الأنواع.

1- طريقة (M) الكبيرة (Big-M Method)

تنطوي فكرة هذه الطريقة على إضافة متغيرات اصطناعية (Artificial Variables) إلى جانب متغيرات الفجوة أو المتغيرات الراكدة (Slack Variables) إلى قيود نموذج البرمجة الخطية في حالة التقليل (Minimization) عندما تكون علامات القيود مكتوبة بصيغة المساواة (=) أو أكبر من أو يساوي (≤)، وإلى دالة الهدف (Z)، على أن تقترن المتغيرات الاصطناعي (R_i) في دالة الهدف (Z) بمعاملات كبيرة جدا تدعى (M)، وتحمل هذه المعاملات (M) إشارة موجبة في دالة الهدف في حالة التقليل (Minimization)، وإشارة سالبة في حالة التعظيم (Maximization).

1- 1- خطوات ومرحل الحل باستخدام طريقة (M) الكبيرة: لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية وذلك من خلال:

- تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات، فإذا كانت القيود بصيغة أقل من أو يساوي ($\leq$) تضاف إليها المتغيرات الراكدة ($+S_i$)، أما إذا كانت القيود بصيغة أكبر من أو يساوي ($\geq$) يتم طرح المتغيرات الراكدة ($-S_i$)، لإعادة التوازن بين طرفي قيود النموذج.
- إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_i) إلى كل القيود (سواء كانت بصيغة أكبر من أو يساوي، بصيغة أقل من أو يساوي، وبصيغة المساواة)، لتشارك في تشكيل أعمدة مصفوفة الوحدة.
- إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_i) والتي ظهرت في قيود النموذج إلى دالة الهدف كالتالي:

أ- إذا كانت دالة الهدف من نوع التعظيم (*Max*): يخصص لمعامل (R_i) في دالة الهدف جزءا كبيرا جدا وليكن (M) وبإشارة سالبة (-M)، لأنه عند تحويل معادلة دالة الهدف للصيغة القياسية يتحول معامل (R_i) من (-M) إلى (+M)، وهذا يخالف شرط تحديد المتغير الداخل في حالة التعظيم (Maximization)، فعلى هذا الأساس سوف لن يتم اختيار (R_i) كمتغير داخل إلى عمود المتغيرات الأساسية، وبذلك يتم التخلص من تأثيره عند حل النموذج.

ب- إذا كانت دالة الهدف من نوع التخفيض (*Min*): يخصص لمعامل (R_i) في دالة الهدف جزءا كبيرا جدا وليكن (M) وبإشارة موجبة (+M)، لأنه عند تحويل معادلة دالة الهدف للصيغة القياسية يتحول معامل (R_i) من (-M) إلى (-M)، وهذا يخالف شرط تحديد المتغير الداخل في حالة التخفيض (Minimization)، فعلى هذا الأساس سوف لن يتم اختيار (R_i) كمتغير داخل إلى عمود المتغيرات الأساسية، وبذلك يتم التخلص من تأثيره عند حل النموذج.

- صياغة دالة هدف جديدة (Z) بدلالة المتغيرات (x_j) و (S_i) بعد التعويض عن قيم (R_i) بما يساويها من المتغيرات (x_j) و (S_i)، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة (M) فقط.

- تصميم جدول الحل الأساسي الممكن، اعتمادا على جميع معاملات المتغيرات (x_j، S_i ،R_i) الموجودة في قيود النموذج ودالة الهدف *(Z)*.
- تحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل: وكذلك من خلال:

- تحديد المتغير الداخل، على أساس أكبر قيمة موجبة في سطر دالة الهدف (Z) في حالة التخفيض (Minimization)، وأصغر قيمة سالبة في حالة التعظيم (Max) كما تم التطرق إليه سابقا.
- اعتماد بقية الخطوات السابقة والواردة في حالة التعظيم (Maximization)، ما عدا بعض الاختلافات الطفيفة، والتي يمكن توضيحها في الخطوة التالية.

- يمكن الحصول على الحل الأمثل لمشكلة التخفيض (Minimization)، وذلك عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة (Z) أقل أو تساوي الصفر ($\Sigma Z \leq 0$)، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد معاملات دالة الهدف (Z) موجبة، فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل.
- في حالة وجود أحد معاملات دالة الهدف (Z) أكبر من الصفر، يعاد إجراء الخطوات السابقة، حتى الحصول على جميع المعاملات في سطر دالة الهدف (Z) أقل أو تساوي الصفر ($\Sigma Z \leq 0$)، مما يعني الوصول إلى الحل الأمثل.

مثال (03): أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة (M) الكبيرة (Big-M Method):

$$Min(Z) = 20x_1 + 20x_2$$

$$s/c \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \geq 50 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 40 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

للقيام بالحل نتبع الخطوات التالية:

- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية كالتالي:

- إضافة المتغيرات الراكدة إلى القيود ودالة الهدف (Z):

$Z - 20x_1 - 20x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 = 0$ ثم: $Min(Z) = 20x_1 + 20x_2 - 0.S_1 - 0.S_2$

$10\,x_1 + 5x_2 - S_1 = 50$

$5\,x_1 + 10\,x_2 - S_2 = 40$

$(x_1 . x_2 . S_1 . S_2) \geq 0$

يتضح من القيدين السابقين بأن قيم ($S_1 = -50$) و($S_2 = -40$) ظهرت سالبة، مما يتعارض مع شرط عدم السلبية ($S_1 . S_2) \geq 0$)، ولمعالجة هذا الموضوع يتم إضافة المتغيرات الاصطناعية للقيود ودالة الهدف (Z) .

- إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_i) لقيود النموذج ودالة الهدف (Z) كالآتي:

$Z - 20x_1 - 20x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 - \boldsymbol{M}.\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{M}.\boldsymbol{R_2} = 0$

$10x_1 + 5x_2 - S_1 + \boldsymbol{R_1} = 50$ ... ... (1)

$5\,x_1 + 10\,x_2 - S_2 + \boldsymbol{R_2} = 40$ ... ... (2)

$(x_1 . x_2 . S_1 . S_2 . R_1 . R_2) \geq 0$

ملاحظة: يتم إضافة المتغيرات الاصطناعية للقيود بصيغة أكبر من أو تساوي ($\geq$) وبصيغة المساواة ($=$) [مع طرح المتغيرات الراكدة في حالة أكبر من أو تساوي ($\geq$)]، أما القيود بصيغة أقل من أو تساوي ($\leq$) فتضاف إليها المتغيرات الراكدة فقط.

- صياغة دالة الهدف (Z) بدلالة المتغيرات القرارية (x_j) ومتغيرات الفجوة (S_i) فقط على النحو التالي:

من المعادلتين (1) و(2) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R_1} &= 50 - 10x_1 - 5x_2 + S_1 \\ \boldsymbol{R_2} &= 40 - 5\,x_1 - 10\,x_2 + S_2 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

- نعوض قيم (R_1) و (R_2) الواردة في العلاقة (3) في دالة الهدف (Z) ينتج ما يلي:

$$Z - 20x_1 - 20x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 - M.(R_1 + R_2) = 0$$

$$Z - 20x_1 - 20x_2 - M.(50 - 10x_1 - 5x_2 + S_1 + 40 - 5\,x_1 - 10\,x_2 + S_2) = 0$$

$$Z - 20x_1 - 20x_2 - M.50 + M.10\,x_1 + M.5x_2 - M.S_1 - M.40 + M.5\,x_1 + M.10\,x_2 - M.S_2 = 0$$

$$Z - (20 - 15M)x_1 - (20 - 15M)x_2 - M.S_1 - M.S_2 - 90.M = 0$$

$$Z - (20 - 15M)x_1 - (20 - 15M)x_2 - M.S_1 - M.S_2 = 90.M$$

$$Z + (-20 + 15M)x_1 + (-20 + 15M)x_2 - M.S_1 - M.S_2 = 70.M$$

- تصميم جدول الحل الأساسي (الحل الممكن): وذلك بالشكل التالي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i	b_i/x_1
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
R_1	**10**	5	−1	0	1	0	50	5
R_2	5	10	0	−1	0	1	40	8
Z	(−20 + 15M)	(−20 + 15M)	−M	−M	0	0	90M	

- تحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل:

- المتغير الداخل هو (x_1)، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة وهي (−20 + 15M) في سطر دالة الهدف (Z)، وبالتالي فهو يمثل سطر الارتكاز.

- المتغير الخارج هو (R_1)، كونه يقابل أصغر قيمة موجبة بعد قسمة قيم العمود (b_i) على قيم العمود (x_2) والذي يمثل عمود الارتكاز.

- إن عنصر الارتكاز هو (10) والذي يمثل تقاطع سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز.
- إيجاد قيم السطر المحوري: نقوم بقسمة قيم السطر للمتغير الخارج (R_1) على العنصر المحوري 3، وذلك للحصول على السطر المحوري x_2:

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{10} \quad 0 \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad 5$$

- إيجاد قيم باقي أسطر الجدول: وذلك دائما باستخدام الصيغة السابقة:

$$new\,(R_2) = [5 \quad 10 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 50] - (5)*[1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{10} \quad 0 \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad 5]$$

$$= \left[0 \quad \frac{15}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad 15\right]$$

$$new\,(Z) = [(-20+15M) \quad (-20+15M) \quad -M \quad -M \quad 0 \quad 0 \quad 90M] - (-20+15M)*[1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{10} \quad 0 \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad 5]$$

$$= \left[0 \quad \left(-10+\frac{15}{2}M\right) \quad \left(-10+\frac{1}{2}M\right) \quad -M \quad \left(10-\frac{3}{2}M\right) \quad 0 \quad (-100+15M)\right]$$

نسجل هذه القيم في جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i	b_i/x_1
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	0	5	10
R_2	0	$\boxed{\frac{15}{2}}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	15	2
Z	0	$\left(-10+\frac{15}{2}M\right)$	$\left(-10+\frac{1}{2}M\right)$	$-M$	$\left(10-\frac{3}{2}M\right)$	0	(100 + 15M)	

- اختبار أمثلية الحل والوصول إلى الحل الأمثل: يعتبر الحل أمثلا في حالة التقليل (حالة مثالنا)، عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة سالبة أو معدومة أي $\Sigma Z \leq 0$ ، وهو ما لم يتحقق بعد بسبب وجود قيمة موجبة $\left(-10+\frac{15}{2}M\right)$ في السطر الجديد لـ Z، وبالتالي يجب تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة، نحصل على جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
x_1	1	0	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	4
x_2	0	1	$\frac{1}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	2
Z	0	0	$-\frac{28}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$(\frac{28}{3}-M)$	$(\frac{4}{3}-M)$	120

نلاحظ أن كل معاملات دالة الهدف أصبحت سالبة أو معدومة أي ($\Sigma Z \leq 0$)، وبالتالي قد وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = 120\,,\quad x_1 = 4,\quad x_2 = 2,\quad S_1 = 0,\quad S_2 = 0$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** لتحقيق المؤسسة أقل تكلفة ممكنة والمقدرة بـــ 120 دج (Z=120) يجـــب على المؤسسة إنتاج 4 وحدات من المنتوج الأول ($x_1 = 4$)، و إنتاج وحدتين من المنتوج الثاني ($x_2 = 2$) ، مع عدم بقاء طاقة عاطلة في القيدين الأول والثاني ($S_1 = 0,\ S_2 = 0$).

ملاحظة:

نقصد بمعاملات دالة الهدف التي تأخذ بعين الاعتبار للتأكد من الوصول إلى الحل الأمثـــل المتغيـــرات القرارية (x_j) ومتغيرات الفجوة (S_i) دون المتغيرات الإصطناعية (R_i).

1-2- سلبيات طريقة (M) الكبيرة (Big-M Method):

تتميز طريقة (M) الكبيرة (Big-M Method) لحل مسائل البرمجة الخطية بعدة سلبيات نذكر منها:

- كان للمعامل M تأثير كبير في اختيار وتحديد المتغير الداخل إلى عمود المتغيـــرات الأساســـية ولـــيس المعاملات الأصلية لمتغيرات النموذج الخطي.
- إن حسابات عمليات الصفوف ليست بالبسيطة لظهور M أثناء عمليات إلغاء معاملات عمـــود الارتكـــاز وجعلها صفر لكل جدول من جداول الحل.
- قد يتضح في الجدول الأخير أن الحل غير ممكن لظهور أحد أو كل المتغيرات الاصـــطناعية (R_i) فـــي عمود المتغيرات الأساسية وبمستوى موجب، ففي هذه الحالة لا يمكن الاعتماد على النتائج ولا تطبيقهـــا في الواقع، ويطلق على هذه الحالة بالحل غير الممكن (infeasible Solution).

لهذا توصل المختصون إلى طريقة أخرى لا تعتمد على المعامل M في إزالة تأثير المتغيرات الاصطناعية على النموذج الخطي للمشكلة، تتضمن مرحلتين في الحل، لذا تسمى بطريقة المرحلتين.

2- طريقة المرحلتين (Two-Phase Method)

إن طريقة المرحلتين تختلف عن طريقة (Big-M Method) في أنها لا تستخدم المتغير M، إذ أن القيمـــة المفترضة إلى M كرقم كبير جدا قد يجعل الحل يتضمن بعض الصعوبة، وقـــد طـــور العالمـــان Dantzig و Orden طريقة المرحليتين، والتي تعتمد في إيجاد الحل الأمثل على مرحلتين أساسيتين.

وتعد طريقة المرحلتين أبسط من طريقة (M) الكبيرة في إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية في حالة التقليل (Minimization)، إذ يمكن الوصول إلى الحل الأمثل للنموذج بعد التأكد بأن هناك حل للنموذج، وذلك من خلال الحصول على قيمة دالة الهدف الجديدة (r) مساوية للصفر، أي أن $(r=0)$، وبعدمه لا يوجد حل للنموذج.

ويتم الحل بموجب هذه الطريقة على مرحلتين أساسيتين، يمكن توضيحهما على النحو التالي:

2-1- المرحلة الأولى: إن هدف هذه المرحلة هو التأكد من وجود حل أولي ممكن للبرنامج الخطي، فإذا أثبتت نتائج هذه المرحلة اختفاء المتغيرات الاصطناعية (R_i) أو ظهورها في عمود المتغيرات الأساسية في الجدول الأخير من هذه المرحلة لكن بمستوى الصفر، مما يشير إلى اختفائها وعدم تأثيرها على الحل النهائي في المرحلة الثانية، ما يشير إلى امكانية الحصول على حل ممكن للبرنامج الخطي، أما إذا اثبتت نتائج هذه المرحلة عدم اختفاء المتغيرات الاصطناعية (R_i) بل على العكس تظهر وبقيم موجبة، في هذه الحالة نتوقف عن الحل عند هذه المرحلة ولا يتم الانتقال إلى المرحلة الثانية، وتتلخص خطوات هذه المرحلة فيما يلي:

- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية، ومن ثم إضافة المتغيرات الاصطناعية (R_i) لقيود النموذج فقط.
- استبدال دالة الهدف الأصلية بدالة هدف جديدة (r) أساسها جمع كافة المتغيرات الاصطناعية (R_i) التي ظهرت في قيود البرنامج وتقليل قيمتها إلى الصفر قدر الإمكان، أي أن:

$$r = \quad R_1 + R_2 + \cdots + R_i \quad \rightarrow \quad Min$$

<u>ملاحظة:</u> دالة الهدف الجديدة (r) تكون دائما بصيغة التقليل (Min) مهما كان نوع دالة الهدف الأصلية Z (Max أو Min).

- تصميم جدول يتضمن الحل الأولي، اعتمادا على معاملات المتغيرات القرارية والراكدة والاصطناعية $(R_i,\ S_i\ ،x_j)$ في قيود النموذج، ودالة الهدف الجديدة (r).
- نتبع الخطوات السابقة، حتى نحصل على قيمة $(r=0)$، مما يعني وجود حل للنموذج، والمقترنة في كون جميع معاملات دالة الهدف (r) أصغر من أو تساوي الصفر.
- إذا كانت أدنى قيمة لدالة الهدف الجديدة موجبة $(Min\ r_0>0)$، فهذا يعني أنه من المؤكد أن المتغيرات الاصطناعية (R_i) ستظهر في الجدول الأخير للمرحلة الثانية، وعليه يعتبر الحل غير ممكن، لذلك لا يتم الانتقال إلى المرحلة الثانية.

- أما إذا كانت أدنى قيمة لدالة الهدف الجديدة تساوي الصفر ($Min\ r_0$=0)، فهذا يعني أن كل المتغيرات الاصطناعية (R_i) أصبحت قيمتها تساوي الصفر، إما لعدم ظهورها في عمود المتغيرات الأساسية، أو قد تظهر ولكن بمستوى الصفر، وفي كلا الحالتين فإن ذلك يدل على وجود حل ممكن للبرنامج الخطي، عندها يتم الانتقال إلى المرحلة الثانية لاستكمال الحل والوصول إلى الحل الأمثل.

2-2- المرحلة الثانية: وتتلخص خطوات هذه المرحلة فيما يلي:

- اعتماد جدول الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه في نهاية المرحلة الأولى، بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_i)، ودالة الهدف (r)، حيث يتم الاعتماد عليه كجدول الحل الأساسي للمرحلة الثانية.
- الرجوع إلى دالة الهدف الأصلية (Z)، ثم يتم تحويلها إلى الصيغة القياسية من ثم تحل محل معاملات دالة الهدف للجدول الأخير الأمثل للمرحلة الأولى.
- في حالة وجود أحد معاملات دالة الهدف أكبر من الصفر في دالة الهدف (Z)، يعاد إجراء نفس الخطوات السابقة حتى يتم الوصول إلى جميع المعاملات أقل من أو تساوي الصفر أي ($\Sigma Z \leq 0$)، مما يعني الوصول إلى الحل الأمثل للنموذج.

مثال (04): أوجد الحل الأمثل للمثال السابق رقم (03) ولكن بطريقة المرحلتين (Two-Phase Method)

الحل:

للقيام بالحل نتبع الخطوات التالية:

1- المرحلة الأولى: يمكن الوصول إلى حل النموذج في مرحلته الأولى كالتالي:

1-1- الخطوة الأولى: وتتضمن:

- تحويل النموذج من الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$Min(Z) = 20x_1 + 20x_2 - \mathbf{0}.\boldsymbol{S_1} - \mathbf{0}.\boldsymbol{S_2}$ ثم: $Z - 20x_1 - 20x_2 + \mathbf{0}.\boldsymbol{S_1} + \mathbf{0}.\boldsymbol{S_2} = 0$

$10\,x_1 + 5x_2 - \boldsymbol{S_1} = 50$

$5\,x_1 + 10\,x_2 - \boldsymbol{S_2} = 40$

$(x_1 . x_2 . S_1 . S_2\ ) \geq 0$

يتضح من القيدين السابقين بأن قيم ($S_1 = -50$) و ($S_2 = -40$) ظهرت سالبة، مما يتعارض مع شرط عدم السلبية ($S_1 . S_2\ ) \geq 0$)، ولمعالجة هذا الموضوع يتم إضافة المتغيرات الاصطناعية ($R_1 . R_2$) للقيود كما يلي:

$10x_1 + 5x_2 - S_1 + \boldsymbol{R_1} = 50$ ... ... (1)

$5\,x_1 + 10\,x_2 - S_2 + \boldsymbol{R_2} = 40$ ... ... (2)

$(x_1 . x_2 . S_1 . S_2 . R_1 . R_2) \geq 0$

- صياغة دالة هدف جديدة (r)، اعتمادا على قيم $(R_1 . R_2)$، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة ثابتة فقط، إذن: $r = R_1 + R_2 \rightarrow Min$

- من المعادلتين (1) و(2) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R_1} &= 50 - 10x_1 - 5x_2 + S_1 \\ \boldsymbol{R_2} &= 40 - 5\,x_1 - 10\,x_2 + S_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{... ... ... (3)}$$

نعوض قيمة $(R_2$ و $R_1)$ الواردة في العلاقة (3) في دالة الهدف الجديدة (r) كما يلي:

$r = (50 - 10x_1 - 5x_2 + S_1) + (40 - 5x_1 - 10x_2 + S_2)$

$r = 90 - 15x_1 - 15x_2 + S_1 + S_2 \rightarrow Min$

$r + 15x_1 + 15x_2 - S_1 - S_2 = 90$

- تصميم الحل الأساسي (الحل الأولي): ويتم ذلك على النحو التالي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i	b_i/x_1
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
R_1	**10**	5	−1	0	1	0	50	5
R_2	5	10	0	−1	0	1	40	8
Z	−20	−20	0	0	0	0	0	
r	15	15	−1	−1	0	0	90	

- المتغير الداخل هو (x_1)، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة (15) في سطر دالة الهدف (r)، وبالتالي العمود (x_1) يمثل عمود الارتكاز.
- المتغير الخارج هو (R_1)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (5) بعد قسمة قيم العمود (b_i) على قيم عمـــود الارتكاز، وبالتالي السطر (R_1) يمثل سطر الارتكاز.
- عنصر الارتكاز هو (10)، وهو يمثل تقاطع سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز.
- قيم السطر المحوري بعد قسمة قيم السطر للمتغير الخارج (R_2) على العنصر المحوري (4):

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{10} \quad 0 \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad 5$$

- قيم بقية أسطر الجدول وذلك دائما باستخدام الصيغة السابقة:

$$new\,(R_2) = [5 \quad 10 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 40] - (5)*[1 \quad \tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{10} \quad 0 \quad \tfrac{1}{10} \quad 0 \quad 5]$$
$$= \left[0 \quad \tfrac{15}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad -\tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 15\right]$$

$$new\,(Z) = [-20 \quad -20 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - (-20)*[1 \quad \tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{10} \quad 0 \quad \tfrac{1}{10} \quad 0 \quad 5]$$
$$= [0 \quad -1 \quad -10 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 100]$$

$$new\,(r) = [15 \quad 15 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 90] - (15) * [1 \quad \tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{10} \quad 0 \quad \tfrac{1}{10} \quad 0 \quad 5]$$
$$= \left[0 \quad \frac{15}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad -\frac{3}{2} \quad 0 \quad 15\right]$$

- تسجيل هذه القيم في جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	0	5	10
R_2	0	$\boxed{\frac{15}{2}}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	15	2
Z	0	-10	-10	0	10	0	100	
r	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	0	15	

- اختبار أمثلية الحل والوصول إلى الحل الأمثل: بما أن بعض معاملات دالة الهدف الجديدة (r) موجبة، يجب تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك بإتباع نفس الخطوات السابقة، كما هو موضح في الخطوة الثانية.

2-1- الخطوة الثانية: وتتضمن ما يلي:

- المتغير الداخل هو (x_2)، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة $(\frac{15}{2})$ في سطر دالة الهدف (r)، وبالتالي العمود (x_2) يمثل عمود الارتكاز.
- المتغير الخارج هو (R_2)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (2) بعد قسمة قيم العمود (b_i) على قيم عمود الارتكاز، وبالتالي السطر (R_2) يمثل سطر الارتكاز.
- عنصر الارتكاز هو $(\frac{15}{2})$، وهو يمثل تقاطع سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز.
- قيم السطر المحوري بعد قسمة قيم السطر للمتغير الخارج (R_2) على العنصر المحوري (4):

$$0 \quad 1 \quad \frac{1}{15} \quad \frac{2}{15} \quad -\frac{1}{15} \quad \frac{2}{15} \quad 2$$

- قيم بقية أسطر الجدول وذلك دائما باستخدام الصيغة السابقة:

$$new\,(x_1) = [1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{10} \quad 0 \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad 5] - (\frac{1}{2})*[0 \quad 1 \quad -\frac{1}{15} \quad \frac{2}{15} \quad -\frac{1}{15} \quad \frac{2}{15} \quad 2]$$
$$= \left[1 \quad 0 \quad -\frac{2}{15} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{2}{15} \quad -\frac{1}{15} \quad 4\right]$$

$$new\,(z) = [0 \quad -10 \quad -10 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 100] - (-10)*[0 \quad 1 \quad -\frac{1}{15} \quad \frac{2}{15} \quad -\frac{1}{15} \quad \frac{2}{15} \quad 2]$$
$$= \left[0 \quad 0 \quad -\frac{28}{3} \quad -\frac{4}{3} \quad \frac{28}{3} \quad \frac{4}{3} \quad 120\right]$$

$$new\,(r) = \left[0 \quad \frac{15}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad -\frac{3}{2} \quad 0 \quad 15\right] - (\frac{15}{2}) * [0 \quad 1 \quad -\frac{1}{15} \quad \frac{2}{15} \quad -\frac{1}{15} \quad \frac{2}{15} \quad 2]$$
$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0]$$

- تسجيل هذه القيم في جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
x_1	1	0	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	4
x_2	0	1	$\frac{1}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	2
Z	0	0	$-\frac{28}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{28}{3}$	$\frac{4}{3}$	120
r	0	0	0	0	-1	-1	0

بما أن قيمة دالة الهدف الجديدة (r) تساوي 0 أي $(r=0)$، والتي اقترنت بأن جميع المعاملات في سطر دالة الهدف أصغر من أو تساوي صفر، مما يدل ذلك على وجود حل للنموذج، وينبغي الاستمرار بالمرحلة الثانية.

2- المرحلة الثانية: للوصول إلى الحل الأمثل نتبع الخطوات التالية:

- اعتماد النتائج النهائية الواردة في جدول الحل الثالث من المرحلة الأولى، بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1, R_2)، ودالة الهدف (r) من الجدول المذكور.
- اعتماد دالة الهدف الأصلية (Z)، للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة وهي:

$$Z = 2x_1 + 0.S_1 + 0.S_2 \quad \rightarrow \quad Min$$

نقوم باستبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1, R_2)، ودالة الهدف (r)، من جدول الحل الثالث من المرحلة الأولى على النحو التالي:

Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	
x_1	1	0	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	4
x_2	0	1	$\frac{1}{15}$	$-\frac{2}{15}$	2
Z	0	0	$-\frac{28}{3}$	$-\frac{4}{3}$	120

نلاحظ أن كل معاملات دالة الهدف أصبحت سالبة أو معدومة أي $(\Sigma Z \leq 0)$، وبالتالي قد وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = 120\,,\quad x_1 = 4,\quad x_2 = 2,\quad S_1 = 0,\quad S_2 = 0$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** لتحقيق المؤسسة أقل تكلفة ممكنة والمقدرة بـ 120 دج (Z=120) يجب على المؤسسة إنتاج 4 وحدات من المنتوج الأول $(x_1 = 4)$، وإنتاج وحدتين من المنتوج الثاني $(x_2 = 2)$ ، مع عدم بقاء طاقة عاطلة في القيدين الأول والثاني $(S_1 = 0,\ S_2 = 0)$ [2].

IV. حالات خاصة للطريقة المبسطة - السمبلكس (The Simplex Method)

نتطرق في هذا الجزء إلى بعض الحالات الخاصة التي تبزر عند حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة الطريقة المبسطة، والتي تم التطرق إليها في الفصل الثاني عند دراسة الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الخطية، والتي تتمثل فيما يلي:

1- حالة عدم وجود حلول (Infeasibility): ويحدث ذلك عند الوصول إلى الجدول الأخير من الحل، وتكون كل معاملات المتغيرات بالشكل المناسب ما يوحي بالوصول إلى الحل الأمثل، إلا أن ذلك يكون مرفوقا بوجود متغير اصطناعي (R_i) في مزيج الحل بين المتغيرات الأساسية وبقيمة موجبة، وتحدث هذه الحالة عندما يكون أحد قيود المسألة من نوع أقل من أو يساوي $(\leq)$، والقيد الآخر من نوع أكبر من أو يساوي $(\geq)$، والمثال التالي يوضح هذه الحالة.

<u>مثال (05):</u> أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلكس:

[2]- إن النتائج المتوصل إليها هي نفسها التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة (M) الكبيرة (Big-M Method).

$$Max(Z) = 3x_1 + 2x_2$$

$$s/c \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3\,x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ (x_1 \,.\, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

رقم الجدول	Basic Variables	Non-Basic Variables					b_i
		x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	
الجدول الأول	S_1	2	1	1	0	0	2
	R_1	3	4	0	-1	1	12
	Z	$(3M-3)$	$(4M-2)$	0	$-M$	0	$12M$
الجدول الثاني	x_2	2	1	1	0	0	2
	R_1	-5	0	-4	-1	1	4
	Z	$(-5M+1)$	0	$(-4M+2)$	$-M$	0	$(4M+4)$

حيث يلاحظ من خلال الجدول الثاني أن القيم في السطر الأخير بالشكل المناسب ($Z \geq 0$)، ولكن هناك متغير اصطناعي (R_1) لا زال في الحل وبقيمة موجبة (4)، وهذا يعني عدم وجود حل لهذه المسألة.

2- حالة حلول غير محدودة (Unboundeness): وهذا يعني عدم وجود حدود على الحل، ويحدث ذلك في حالة تعظيم الأرباح عندما يكون بالإمكان زيادة أحد العوامل الداخلة في الحل بشكل غير محدود، وبالتالي زيادة الأرباح إلى ما لا نهاية ودون مخالفة قيود المسألة، كما يوضحه المثال التالي.

مثال (06): أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلكس:

$$Max(Z) = 6x_1 - 2x_2$$

$$s/c \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \qquad \leq 4 \\ (x_1 \,.\, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

رقم الجدول	Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i	b_i/x_2
		x_1	x_2	S_1	S_2		
الجدول الأول	S_1	2	-1	1	0	2	-2
	S_2	1	0	0	1	4	∞
	Z	-6	2	0	0	0	
الجدول الثاني	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
	S_2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3	
	Z	0	-1	3	0	6	
الجدول الثالث	x_1	1		0	1	4	
	x_2	0	1	-1	2	6	
	Z	0	0	2	2	12	

ويمكن اكتشاف هذه الحالة عند استخدام الطريقة المبسطة قبل الوصول إلى الحل النهائي (في جدول الحل الأساسي)، ويحدث ذلك عندما نريد تحديد المتغير الخارج وتكون النتيجة سالبة أو غير محددة (∞) أو أي مزيج بينهما، بسبب وجود معاملات سالبة أو معدومة في أعمدة المتغيرات الداخلة.

3- حالة تعدد الحلول (Alternate Optimal Solution): عند وجود حلين أمثلين أو أكثر لمسألة البرمجة الخطية، نقول بأن هذه المسألة لها حلول مثالية متعددة، نستطيع التعرف على هذه الحالة عند حل المسألة بواسطة الطريقة المبسطة، وذلك عند الوصول إلى الحل الأخير (الأمثل)، ذلك أن قيم السطر (Z) تكون مساوية للصفر لعامل أو أكثر من العوامل غير الداخلة في مزيج الحل، وهو ما يوضحه المثال التالي.

مثال (07): أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلكس:

$$Max(Z) = 2x_1 + 4x_2$$

$$s/c \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

رقم الجدول	Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i
		x_1	x_2	S_1	S_2	
جدول الحل الأساسي	S_1	1	2	1	0	5
	S_2	1	1	0	1	4
	Z	-2	-4	0	0	0
الحل الأمثل الأول	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
	S_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
	Z	0	0	2	0	10
الحل الأمثل الثاني	x_2	0	1	1	-1	1
	x_1	1	0	-1	2	3
	Z	0	0	2	0	10

من الجدول يتضح أن هناك حلين لهذه المسألة:

- الحل الأول يستنتج من جدول الحل الأمثل الأول:

$$Z = 10\,,\quad x_1 = 0,\quad x_2 = \frac{5}{2},\quad S_1 = 0,\quad S_2 = \frac{5}{2}$$

- الحل الثاني يستنتج من جدول الحل الأمثل الثاني:

$$Z = 10\,,\quad x_1 = 3,\quad x_2 = 1,\quad S_1 = 0,\quad S_2 = 0$$

4-حالة دورانية أو انحلال الحل (Degeneracy): وتبرز هذه الحالة عند وجود قيد فائض (Redunant Constant)، حيث يكون واحد أو أكثر من قيود المسألة سببا في جعل قيد آخر غير مهم وغير ضروري، وتظهر هذه الحالة عند قسمة قيم العمود (b_i) على قيم عمود المتغير الداخل لمعرفة المتغير الخارج، وتكون النتيجة متساوية في أكثر من سطر، كما يظهره الجدول التالي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i	b_i / x_1
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_1	$\frac{1}{4}$	1	1	2	0	0	10	40
S_2	4	5	$\frac{1}{3}$	-1	1	0	20	**5**
S_3	2	5	2	$\frac{2}{5}$	0	1	10	**5**
Z	3	0	-6	-16	0	0	80	

حيث يلاحظ من خلال الجدول السابق أن المتغير (x_1) هو المتغير الداخل، كما يلاحظ أن هناك تساوي في نسبة قيم عمود المتغير الداخل على قيم السطرين (S_2) و (S_3) لاختيار المتغير الخارج.

V. تمارين محلولة

التمرين الأول: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلكس:

$$Max(Z) = 100x_1 + 80x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2x_2 \leq 220 \\ 10\,x_1 \leq 3000 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

للقيام بعملية الحل نتبع الخطوات التالية:

- كتابة الشكل المعياري للبرنامج الخطي: إذ يصبح البرنامج على الشكل التالي:

$$Z - 100x_1 - 80x_2 - \mathbf{0}.\boldsymbol{S_1} - \mathbf{0}.\boldsymbol{S_2} = 0$$

$$2x_2 + \boldsymbol{S_1} = 220$$

$$10\,x_1 + \boldsymbol{S_2} = 3000$$

$$(x_1 . x_2 . S_1 . S_2) \geq 0$$

- إيجاد الحل الأساسي (الأولي): ويكون جدول الحل الأساسي كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i	b_i/x_1
	x_1	x_2	S_1	S_2		
S_1	0	2	1	0	220	∞
S_2	**10**	0	0	1	3000	300
Z	-100	-80	0	0	0	

2- تحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل: وتشمل الخطوات التالية:

- تحديد المتغير الداخل (سطر الارتكاز): مادامت المشكلة هي حالة تعظيم فإن معامل المتغير هي القيمة (-100)، و(x_1) هو المتغير الداخل.
- تحديد المتغير الخارج (عمود الارتكاز): إن أصغر قيمة موجبة هي 300، لذلك فإن السطر S_2 هو المتغير الخارج، وأن العنصر 10 هو العنصر المحوري (عنصر الإرتكاز)، وهو العنصر الذي يتقاطع عنده سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز.
- إيجاد قيم السطر المحوري (سطر الارتكاز القديم في الجدول الجديد): نقوم بقسمة قيم السطر للمتغير الخارج S_3 على العنصر المحوري 6، وذلك للحصول على السطر المحوري x_2 :

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{10} \quad 300$$

- إيجاد قيم بقية أسطر الجدول: لإيجاد قيم بقية أسطر جدول الحل الجديد نستخدم الصيغة السابقة:

$$new\ (Z) = [-100 \quad -80 \quad 0 \quad 0 \quad 0] - (100)*[1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{10} \quad 300]$$
$$= [\ 0 \quad -80 \quad 0 \quad 10 \quad 30000]$$

نسجل هذه القيم في جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	S_1	S_2		
S_1	0	2	1	0	220	110
x_1	1	0	0	$\frac{1}{10}$	300	∞
Z	0	-80	0	10	30000	

- اختبار أمثلية الحل والوصول إلى الحل الأمثل: يعتبر الحل أمثلا في حالة التعظيم (حالة هذا التمرين)، عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة موجبة أو معدومة أي $\Sigma Z \geq 0$، وهو ما لم يتحقق بعد بسبب وجود قيم سالبة $(-80 \geq 0)$ في السطر الجديد لـ Z، وبالتالي يجب تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة، نحصل على جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	110
x_1	1	0	0	$\frac{1}{10}$	300
Z	0	0	40	10	38800

نلاحظ أن كل معاملات دالة الهدف أصبحت موجبة أو معدومة أي $\Sigma Z \geq 0$، وبالتالي قد وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = 38800\ ,\ x_1 = 300,\ \ x_2 = 110,\ \ S_1 = 0,\ \ \ S_2 = 0$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** لحصول المؤسسة على أكبر ربح ممكن والمقدر بـــ 38800 دج (Z=38800) يجب على المؤسسة إنتاج 300 وحدة من المنتوج الأول ($x_1 = 300$)، وإنتاج 110 وحدة من المنتوج الثاني ($x_3 = 110$)، مع عدم بقاء طاقة عاطلة في القيدين الأول والثاني ($S_1 = 0, S_2 = 0$).

<u>التمرين الثاني:</u> أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة M الكبيرة (The Big M Méthod) :

$$Min(Z) = 5x_1 + 7x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 2\,x_2 = 50 \\ x_1 \geq 20 \\ x_2 \leq 20 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

<u>الحل:</u>

للقيام بالحل نتبع الخطوات التالية:

- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، وذلك بإضافة المتغيرات الراكدة والاصطناعية إلى القيود ودالة الهدف (Z):

$$Z - 5x_1 - 7x_2 + \mathbf{0}.\boldsymbol{S_1} + \mathbf{0}.\boldsymbol{S_2} - \boldsymbol{M}.\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{M}.\boldsymbol{R_2} = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{R_1} = 50 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$x_1 - \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{R_2} = 20$ ... ... (2)

$x_2 + \boldsymbol{S_2} = 20$ ... ... (3)

$(x_1 . x_2 . S_1 . S_2 . R_1 . R_2) \geq 0$

- صياغة دالة الهدف (Z) بدلالة المتغيرات القرارية (x_j) والمتغيرات الراكدة (S_i) فقط على النحو التالي:

من المعادلتين (1) و(2) نحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{R_1} = 50 - x_1 - 2x_2 \\ \boldsymbol{R_2} = 20 - x_1 + S_1 \end{array}\right\} \quad \text{... ... ... (3)}$$

نعوض قيم (R_1) و (R_2) الواردة في العلاقة (3) في دالة الهدف (Z) ينتج ما يلي:

$$Z - 5x_1 - 7x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 - M.(R_1 + R_2) = 0$$

$$Z - 5x_1 - 7x_2 - M.(50 - x_1 - 2x_2 + 20 - x_1 + S_1) = 0$$

$$Z - 5x_1 - 7x_2 - M.50 + M.x_1 + M.2x_2 - M.20 + M.x_1 - M.S_1 = 0$$

$$Z - (5 - 2M)x_1 - (7 - 2M)x_2 - M.S_1 - 70.M = 0$$

$$Z + (-5 + 2M)x_1 + (-7 + 2M)x_2 - M.S_1 = 70.M$$

- تصميم جدول الحل الأساسي (الحل الممكن): وذلك بالشكل التالي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
R_1	1	2	0	0	1	0	50	50
R_2	**1**	0	−1	0	0	1	20	20
S_2	0	1	0	1	0	0	20	∞
Z	(−5 + 2M)	(−7 + 2M)	−M	0	0	0	70M	

- المتغير الداخل هو (x_1) ، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة وهي $(-5 + 2M)$ في سطر دالة الهدف (Z)، وبالتالي فهو يمثل سطر الارتكاز.
- المتغير الخارج هو (R_2)، كونه يقابل أصغر قيمة موجبة بعد قسمة قيم العمود (b_i) على قيم العمود (x_1) والذي يمثل عمود الارتكاز.
- إن عنصر الارتكاز هو (1) والذي يمثل تقاطع سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز.

- إيجاد قيم السطر المحوري: نقوم بقسمة قيم السطر للمتغير الخارج R_2 على العنصر المحوري 1، وذلك للحصول على السطر المحوري x_2 :

$$1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 20$$

ملاحظة: عندما يكون عنصر الارتكاز يساوي الواحد فإن قيم سطر الارتكاز في الجدول السابق هي نفسها في جدول الحل الموالي.

- إيجاد قيم بقية أسطر الجدول: وذلك دائما باستخدام الصيغة السابقة:

$$new\,(R_1) = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 50] - (1)*[1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 20]$$
$$= [0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 30]$$

$$new\,(Z) = [(-5+2M) \quad (-7+2M) \quad -M \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 70M] - (-5+2M) * [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 20]$$
$$= [0 \quad (-7+2M) \quad (5-M) \quad 0 \quad 0 \quad (-5+2M) \quad 0 \quad (-100-30M)]$$

نسجل هذه القيم في جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i	b_i/x_1
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
R_1	0	2	0	0	1	0	30	15
x_1	1	0	−1	0	0	1	20	∞
S_2	0	1	0	1	0	0	20	20
Z	0	(−7 + 2M)	(5 − M)	0	0	(−5 + 2M)	(−100 − 30M)	

- اختبار أمثلية الحل والوصول إلى الحل الأمثل: يعتبر الحل أمثلا في حالة التقليل، عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة سالبة أو معدومة أي $\Sigma Z \leq 0$، وهو ما لم يتحقق بعد بسبب وجود قيم موجبة في السطر الجديد لـ Z، وبالتالي يجب تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة، نحصل على جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	15
x_1	1	0	-1	0	0	1	20
S_2	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
Z	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$(\frac{7}{2}-M)$	$(\frac{3}{2}-M)$	205

نلاحظ أن كل معاملات دالة الهدف أصبحت سالبة أو معدومة أي ($\Sigma Z \leq 0$)، وبالتالي قد وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = 205\,,\quad x_1 = 20,\quad x_2 = 15,\quad S_1 = 0,\quad S_2 = 5$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** لتحقيق المؤسسة أقل تكلفة ممكنة والمقدرة بـ 205 دج (Z=205) يجب على المؤسسة إنتاج 20 وحدة من المنتوج الأول ($x_1 = 20$)، و إنتاج 15 وحدة من المنتوج الثاني ($x_2 = 15$)، مع بقاء طاقة عاطلة في القيد الثاني ($S_2 = 5$)، وعدم بقائها في القيد الأول ($S_1 = 0$).

التمرين الثالث: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة المرحلتين (Two-Phase Method):

$$Max(Z) = 2x_1 - 4x_2 + x_3$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 6 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

للقيام بالحل نتبع الخطوات التالية:

1- المرحلة الأولى: يمكن الوصول إلى حل النموذج في مرحلته الأولى كالتالي:

- تحويل النموذج من الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - S_2 + R_1 = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$(x_1 . x_2 . x_3 . S_1 . S_2 . R_1) \geq 0$$

- صياغة دالة هدف جديدة (r)، اعتمادا على قيم (R_1)، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة ثابتة فقط، إذن: $r = R_1 \rightarrow \text{Min}$
- من المعادلة (1) ونحصل على :

$$R_1 = 6 - x_1 - 2x_2 + 3x_3 + S_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

نعوض قيمة (R_1) الواردة في العلاقة (3) في دالة الهدف الجديدة (r) كما يلي:

$$r = 6 - x_1 - 2x_2 + 3x_3 + S_2$$

$$r + x_1 + 2x_2 - 3x_3 - S_2 = 6$$

- تصميم الحل الأساسي (الحل الأولي): ويتم ذلك على النحو التالي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1		
R_1	1	2	−3	0	−1	1	6	3
S_1	2	−2	1	1	0	0	8	−4
Z	−2	4	−1	0	0	0	8	
r	1	2	−3	0	−1	0	6	

- المتغير الداخل هو (x_2)، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة (2) في سطر دالة الهدف (r)، وبالتالي العمود (x_2) يمثل عمود الارتكاز.
- المتغير الخارج هو (R_1)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (3) بعد قسمة قيم العمود (b_i) على قيم عمود الارتكاز، وبالتالي السطر (R_1) يمثل سطر الارتكاز.
- عنصر الارتكاز هو (2)، وهو يمثل تقاطع سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز.
- قيم السطر المحوري بعد قسمة قيم السطر للمتغير الخارج (R_1) على العنصر المحوري (2):

$$\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{3}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 3$$

- قيم بقية أسطر الجدول وذلك دائما باستخدام الصيغة السابقة:

$$new\,(S_1) = [2 \ -2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 8] - (2)*[\tfrac{1}{2} \ 1 \ -\tfrac{3}{2} \ 0 \ -\tfrac{1}{2} \ \tfrac{1}{2} \ 3]$$

$$= [3 \ 0 \ -2 \ 1 \ -1 \ 1 \ 14]$$

$$new\ (Z) = [-2\ \ 4\ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 8] - (2)*[\frac{1}{2}\ \ 1\ -\frac{3}{2}\ \ 0\ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ 3]$$
$$= [-4\ \ 0\ \ 5\ \ 0\ \ 2\ -2\ -12]$$
$$new\ (r) = [1\ \ 2\ -3\ \ 0\ -1\ \ 0\ \ 6] - (5) * [\frac{1}{2}\ \ 1\ -\frac{3}{2}\ \ 0\ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ 3]$$
$$= [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ -1\ \ 0]$$

- تسجيل هذه القيم في جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
S_1	3	0	-2	1	-1	1	14
Z	-4	0	5	0	2	-2	12
r	0	0	0	0	0	-1	0

بما أن قيمة دالة الهدف الجديدة (r) تساوي 0 أي (r=0)، والتي اقترنت بأن جميع المعاملات في سطر دالة الهدف أصغر من أو تساوي صفر، مما يدل ذلك على وجود حل للنموذج، وينبغي الاستمرار بالمرحلة الثانية.

2- **المرحلة الثانية:** للوصول إلى الحل الأمثل نتبع الخطوات التالية:

- اعتماد النتائج النهائية الواردة في جدول الحل الثالث من المرحلة الأولى، بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1)، ودالة الهدف (r) من الجدول المذكور.
- اعتماد دالة الهدف الأصلية (Z)، للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة وهي:

$$Z = 2x_1 + 0.S_1 + 0.S_2 \quad \rightarrow \quad \text{Max}$$

نقوم بتحسين قيمة دالة الهدف (Z) للحصول على الحل الأمثل النهائي، بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1)، ودالة الهدف (r)، وإضافة دالة الهدف (Z) إلى جدول الحل الثالث من المرحلة الأولى كما يلي:

Basic Variables	Non-Basic Variables					b_i	b_i/x_1
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2		
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3	6
S_1	3	0	-2	1	-1	14	$\frac{14}{3}$
Z	-4	0	5	0	2	-12	

- بما أن بعض معاملات دالة الهدف الأصلية (Z) سالبة (-4) ،يجب تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة، نحصل على جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables					b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	
x_2	0	1	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
Z	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{3}$

نلاحظ أن كل معاملات دالة الهدف أصبحت موجبة أو معدومة أي ($\Sigma Z \geq 0$)، وبالتالي قد وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = \frac{20}{3}, \quad x_1 = \frac{14}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 0, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** لتحقيق المؤسسة أكبر ربح ممكن والمقدر بـ $\frac{20}{3}$ دج ($Z=\frac{20}{3}$) يجب على المؤسسة إنتاج $\frac{14}{3}$ وحدات من المنتوج الأول ($x_1 = \frac{14}{3}$)، وإنتاج $\frac{2}{3}$ وحدات من المنتوج الثاني ($x_2 = \frac{2}{3}$)، وعدم إنتاج أي وحدة من المنتوج الثالث ($x_3 = 0$)، مع عدم بقاء أي طاقة عاطلة في القيدين الأول والثاني ($S_1 = 0,\ S_2 = 0$).

<u>التمرين الرابع:</u> أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة M الكبيرة (The Big M Méthod) وبطريقة المرحلتين (Two-Phase Method):

$$Max(Z) = x_1 + \%x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

1- إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة M الكبيرة (The Big M Méthod):

للقيام بالحل نتبع الخطوات التالية:

- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، وذلك بإضافة المتغيرات الراكدة والاصطناعية إلى القيود ودالة الهدف (Z):

$$Z - x_1 - 5x_2 - \boldsymbol{M}.\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{M}.\boldsymbol{R_2} = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{R_1} = 3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$2\,x_1 - x_2 + \boldsymbol{R_2} = 4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$(x_1 . x_2 . R_1 . R_2) \geq 0$$

- صياغة دالة الهدف (Z) بدلالة المتغيرات القرارية (x_j) والمتغيرات الراكدة (S_i) فقط على النحو التالي:

من المعادلتين (1) و(2) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R_1} &= 3 - x_1 - 2x_2 \\ \boldsymbol{R_2} &= 4 - 2\,x_1 + x_2 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

نعوض قيم (R_1) و (R_2) الواردة في العلاقة (3) في دالة الهدف (Z) ينتج ما يلي:

$$Z - x_1 - 5x_2 - M.(R_1 + R_2) = 0$$

$$Z - x_1 - 5x_2 - M.(3 - x_1 - 2x_2 + 4 - 2x_1 + x_2) = 0$$

$$Z - x_1 - 5x_2 - M.3 + M.x_1 + M.2x_2 - M.4 + M.2x_1 - M.x_2 = 0$$

$$Z - (1 - 3M)x_1 - (5 - M)x_2 - 7.M = 0$$

$$Z + (-1 + 3M)x_1 + (-5 + M)x_2 = 7.M$$

- تصميم جدول الحل الأساسي (الحل الممكن): وذلك بالشكل التالي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**				b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	R_1	R_2		
R_1	1	2	1	0	3	3
R_2	**2**	−1	0	1	4	2
Z	(−1 + 3M)	(−5 + M)	0	0	7M	

- المتغير الداخل هو (x_1) ، كونه يقابل أكبر قيمة موجبة وهي $(-1 + 3M)$ في سطر دالة الهدف (Z)، وبالتالي فهو يمثل سطر الارتكاز.

- المتغير الخارج هو (R_2)، كونه يقابل أصغر قيمة موجبة بعد قسمة قيم العمود (b_i) على قيم العمود (x_1) والذي يمثل عمود الارتكاز.
- إن عنصر الارتكاز هو (2) والذي يمثل تقاطع سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز.
- إيجاد قيم السطر المحوري: نقوم بقسمة قيم السطر للمتغير الخارج R_2 على العنصر المحوري 2، وذلك للحصول على السطر المحوري x_2 :

$$1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 2$$

- إيجاد قيم بقية أسطر الجدول: وذلك دائما باستخدام الصيغة السابقة:

$$new\,(R_1) = [1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 3] - (1)*[1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 2]$$

$$= \left[0 \quad \frac{5}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad 2\right]$$

$$new\,(Z) = [(-1+3M) \quad (-5+M) \quad 0 \quad 0 \quad 7M] - (-1+3M) * [1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 2]$$

$$= \left[0 \quad \left(-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}M\right) \quad 0 \quad \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}M\right) \quad (2+M)\right]$$

نسجل هذه القيم في جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	R_1	R_2		
R_1	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{5}$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	
Z	0	$\left(-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}M\right)$	0	$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}M\right)$	(2 + M)	

- اختبار أمثلية الحل والوصول إلى الحل الأمثل: يعتبر الحل أمثلا في حالة التقليل، عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة سالبة أو معدومة أي $\Sigma Z \leq 0$، وهو ما لم يتحقق بعد بسبب وجود قيم موجبة في السطر الجديد لـ Z، وبالتالي يجب تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة، نحصل على جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i
	x_1	x_2	R_1	R_2	
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$
Z	0	0	$\left(\frac{11}{5}-M\right)$	$\left(-\frac{3}{5}-M\right)$	$\frac{21}{5}$

نلاحظ أن كل معاملات دالة الهدف أصبحت سالبة أو معدومة أي ($\Sigma Z \leq 0$)، وبالتالي قد وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = \frac{21}{5}\ ,\quad x_1 = \frac{11}{5},\quad x_2 = \frac{2}{5},\quad S_1 = 0,\quad S_2 = 0$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** لتحقيق المؤسسة أكبر ربح ممكن والمقدر بـ $\frac{21}{5}$ دج ($Z=\frac{21}{5}$) يجب على المؤسسة إنتاج $\frac{11}{5}$ وحدة من المنتوج الأول ($x_1 = \frac{11}{5}$)، و إنتاج $\frac{2}{5}$ وحدة من المنتوج الثاني ($x_2 = \frac{2}{5}$)، مع عدم بقاء طاقة عاطلة في القيدين الأول والثاني ($S_1 = 0,\ S_2 = 0$).

2- إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المرحلتين(Two-Phase Method):

للقيام بالحل نتبع الخطوات التالية:

2-1- المرحلة الأولى: يمكن الوصول إلى حل النموذج في مرحلته الأولى كالتالي:

- تحويل النموذج من الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{R_1} = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2x_1 - x_2 + \boldsymbol{R_2} = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$(x_1 . x_2 . R_1 . R_2\ ) \geq 0$$

- صياغة دالة هدف جديدة (r)، اعتمادا على قيم $\left(R_1 \text{ و } R_2\right)$، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة ثابتة فقط، إذن: $r = R_1 + R_2 \rightarrow Min$

- من المعادلتين (1) و(2) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R_1} &= 3 - x_1 - 2x_2 \\ \boldsymbol{R_2} &= 4 - 2x_1 + x_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

نعوض قيمة $\left(R_1 \text{ و } R_2\right)$ الواردة في العلاقة (3) في دالة الهدف الجديدة (r) كما يلي:

$$r = (3 - x_1 - 2x_2) + (4 - 2x_1 + x_2)$$
$$r = 7 - 3x_1 - x_2 \rightarrow Min$$
$$r + 3x_1 + x_2 = 7$$

- تصميم الحل الأساسي (الحل الأولي): ويتم ذلك على النحو التالي:

Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	R_1	R_2		
R_1	1	2	1	0	3	3
R_2	2	−1	0	1	4	1
Z	−1	−5	0	0	0	
r	3	1	0	0	7	

يمكن تلخيص الخطوات الأخرى ضمن المرحلة الأولى في الجدولين التاليين:

رقم الجدول	Basic Variables	Non-Basic Variables				b_i	b_i/x_2
		x_1	x_2	R_1	R_2		
الجدول الأول	R_1	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{5}$
	x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
	Z	0	$-\frac{11}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	∞
	r	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	
الجدول الثاني	x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
	x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$	
	Z	0	0	$\frac{11}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{21}{5}$	
	r	0	0	−1	−1	0	

بما أن قيمة دالة الهدف الجديدة (r) تساوي 0 أي (r=0)، والتي اقترنت بأن جميع المعاملات في سطر دالة الهدف أصغر من أو تساوي صفر، مما يدل ذلك على وجود حل للنموذج، وينبغي الاستمرار بالمرحلة الثانية.

2-2- المرحلة الثانية: للوصول إلى الحل الأمثل نتبع الخطوات التالية:

- اعتماد النتائج النهائية الواردة في جدول الحل الثالث من المرحلة الأولى، بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1)، ودالة الهدف (r) من الجدول المذكور.

- اعتماد دالة الهدف الأصلية (Z)، للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة وهي:

$$Z = x_1 + 5x_2 \quad \rightarrow \quad Max$$

نقوم بتحسين قيمة دالة الهدف (Z) للحصول على الحل الأمثل النهائي، بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1)، ودالة الهدف (r)، وإضافة دالة الهدف (Z) إلى جدول الحل الثالث من المرحلة الأولى على النحو التالي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**		b_i
	x_1	x_2	
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$
x_1	1	0	$\frac{11}{5}$
Z	0	0	$\frac{21}{5}$

بما أن كل معاملات دالة الهدف أصبحت سالبة أو معدومة أي $(\Sigma Z \leq 0)$، وبالتالي قد وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = \frac{21}{5}, \quad x_1 = \frac{11}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0$$

VI. تمارين غير محلولة

<u>التمرين الأول:</u> أوجد الحل الأمثل للبرامج الخطية التالية باستخدام طريقة السمبلكس في الحل:

$Max(Z) = 50x_1 + 70x_2 + 120x_3$ $s/c \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 90 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 4000,\ x_1 = 20,\ x_3 = 20,\ S_1 = 30,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0$	$Max(Z) = 3x_1 + x_2 + 2x_3$ $s/c \begin{cases} 1\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 84 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 90 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 144,\ x_1 = 30,\ x_2 = 0,\ x_3 = 27,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0$
$Max(Z) = 5x_1 + 7x_2$ $s/c \begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 4 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 56,\ x_1 = 0,\ x_2 = 8,\ S_1 = 0,\ S_2 = 12,\ S_3 = 4$	$Max(Z) = 100x_1 + 60x_2$ $s/c \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 96 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 864,\ x_1 = \frac{12}{5}, x_2 = \frac{52}{5},\ S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = \frac{72}{5}$
$Max(Z) = 3x_1 + 2x_2$ $s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = \frac{38}{3},\ x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{4}{3}, S_1 = 0,\ S_2 = 0, S_3 = 3, S_4 = \frac{2}{3}$	$Max(Z) = 50x_1 + 80x_2 + 120x_3$ $s/c \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 90 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = \frac{480}{7},\ x_1 = \frac{60}{7}, x_2 = \frac{30}{7}, S_1 = 0, S_2 = 0$

التمرين الثاني: أوجد الحل الأمثل للبرامج الخطية التالية باستخدام طريقتي (Big-M Method) و (Two-Phase Method):

$Min(Z) = 2x_1 + x_2$ $s/c \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 30 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 60 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 20,\ x_1 = 6,\ x_2 = 8,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0$	$Min(Z) = 4x_1 + x_2$ $s/c \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = \frac{17}{5},\ x_1 = \frac{2}{5},\ x_2 = \frac{9}{5},\ S_1 = 1,\ S_2 = 0$
$Max(Z) = x_1 + 5x_2$ $s/c \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 19,\ x_1 = \frac{21}{4}, x_2 = \frac{11}{4}, S_1 = 0,\ S_2 = 0$	$Max(Z) = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ $s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$ $Z = \frac{141}{5},\ x_1 = \frac{9}{5}, x_2 = \frac{8}{5}, S_1 = 0, S_2 = 0$
$Min(Z) = 10x_1 + 30x_2$ $s/c \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 2 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = \frac{200}{3},\ x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0$	$Min(Z) = 2x_1 + x_2$ $s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 30 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$ $Z = 20,\ x_1 = 6, x_2 = 8,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0$

المحور الرابع: البرنامج الثنائي أو المقابل
Dual Pogram

إن المسائل التي يتم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية يطلق عليها اصطلاح النماذج الأولية (Primal Models)، ومن الممكن إعادة صياغة البرنامج الأولي بأسلوب آخر يطلق عليه اصطلاح البرنامج المقابل أو الثنائي (Dual)، إذ أن لكل برنامج يوجد برنامج آخر يقابله، ومن هنا يتبين أن كل مسألة تتوفر فيها شروط البرمجة الخطية يمكن تمثيلها على شكل نموذج برمجة خطية يوجد لها نموذجان، الأول هو الذي يمثل المسألة الأولية، أما الثاني فهو البرنامج المقابل (الثنائي)، ويمثل الجانب الآخر من المسألة.

I. مفهوم البرنامج الثنائي (المقابل)

البرنامج الثنائي أو المقابل هو عبارة عن برنامج معكوس للبرنامج الأصلي يلجأ إليه عندما يصعب حل المسألة الأصلية، أي أن لكل برنامج من البرمجة الخطية هناك برنامج مقابل له ومشتق منه، فإذا كان البرنامج الأول متعلق بتعظيم دالة الهدف، فإن البرنامج المقابل له سيكون متعلق بتخفيض دالة الهدف، وتصاغ عادة من نفس البيانات التي يتضمنها البرنامج الأول والعكس صحيح، وعليه فإن كل صيغة من هذه الصيغ تحمل تفسيرات معينة، يمكن استخدامها لحل مسألة برمجة خطية واحدة بطرق مختلفة بالرغم من أن النتائج والمعلومات التي يتم الحصول عليها من حل مسائل البرمجة الخطية هي متشابهة في كلتا الحالتين.

II. خصائص ومميزات البرنامج الثنائي (المقابل)

يتميز البرنامج الثنائي أو المقابل بمجموعة من الخصائص نذكرها فيما يلي:

- يساعد البرنامج الثنائي على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان، وذلك بتقليص خطوات الحل، أي أن طريقة حل المسألة الثنائية تستلزم خطوات رياضية أقل تعقيدا من الخطوات اللازمة لحل المسألة الأولية أحيانا.
- يمكن إيجاد الحل الأمثل في البرنامج الثنائي عند وجود متغير أساسي في البرنامج ذو قيمة سالبة، في حين لا يمكن حل البرنامج الأولي إذا كان لأحد متغيراته قيمة سالبة.
- يساعد البرنامج الثنائي على إجراء تحليل ما بعد الأمثلية والتوصل إلى الحل بصورة مختصرة في حالة إضافة قيود جديدة للمسألة أو إجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية.

III. تحويل البرنامج الأولي إلى البرنامج الثنائي وصياغة المسألة الثنائية (المقابلة)

من أجل تحويل البرنامج الأولي إلى البرنامج الثنائي وبالعكس يتم اتباع الخطوات التالية:

1- إذا كانت دالة الهدف في البرنامج الأولي من النوع تعظيم (Max) فإنها تحول إلى النوع تخفيض (Min) في البرنامج الثنائي والعكس صحيح.

2- عدد المتغيرات في البرنامج الأولي يكون مساويا لعدد القيود في البرنامج الثنائي، فمثلا إذا كان البرنامج الخطي يحتوي على ثلاث متغيرات فإن البرنامج الثنائي سيحتوي على ثلاث قيود.

3- عدد القيود في البرنامج الأولي يكون مساويا لعدد المتغيرات في النموذج الثنائي، فمثلا إذا كان النموذج الأولي يحتوي على أربعة قيود فإن البرنامج الثنائي سيحتوي على أربعة متغيرات.

4- إذا كانت القيود في البرنامج الأولي على شكل أكبر أو يساوي $(\geq)$ فإنها تتحول إلى الشكل أصغر أو يساوي $(\leq)$ في البرنامج الثنائي والعكس صحيح أيضا.

5- معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي هي قيم الجوانب اليمنى أو الموارد (b_i) للنموذج الثنائي، وقيم الجوانب اليمنى أو الموارد (b_i) للنموذج الأولي تصبح معاملات دالة الهدف في البرنامج الثنائي.

6- معاملات كل متغير في قيود البرنامج الأولي حسب ترتيب القيود تتحول إلى معاملات متغيرات قيود البرنامج الثنائي حسب نفس الترتيب.

7- في كلا البرنامجين تكون المتغيرات غير سالبة مادام صيغة البرنامج الأولي قانونية.

وتفصيلا إذا كان البرنامج الأولي في شكل الصيغة القانونية التالية:

$$Max(Z) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

فإن برنامجه الثنائي يكون على الشكل التالي:

$$Min(Z) = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \geq c_3 \\ (y_1 . y_2) \geq 0 \end{cases}$$

يلاحظ أن هذين البرنامجين متناظرين، ويظهر التناظر عموما من خلال الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	.	.	x_n	≥	0
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	.	.	a_{1n}	≤	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	.	.	a_{2n}	≤	b_2
y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	.	.	a_{3n}	≤	b_3
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	.	.	a_{mn}	≤	b_m
≥	≥	≥	≥	.	.	≥		
0	c_1	c_2	c_3	.	.	c_n		**Min / Max**

IV. الانتقال من الحل الأمثل للبرنامج الأولي إلى الحل الأمثل للبرنامج الثنائي أو العكس

لإعداد جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي انطلاقا من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي أو العكس نتبع الخطوات التالية:

1- في جدول الحل الأمثل تكون العلاقة بين متغيرات البرنامجين كما هو موضح في الجدول التالي:

	المتغيرات الأساسية	**متغيرات الفجوة**
البرنامج الأولي	$x_1 \ x_2 \dots\dots\dots\dots\dots x_j$	$s_1 \ s_2 \dots\dots\dots\dots\dots s_i$
البرنامج الثنائي	$e_1 \ e_2 \dots\dots\dots\dots\dots e_j$	$y_1 \ y_2 \dots\dots\dots\dots\dots y_i$
	متغيرات الفجوة	**المتغيرات الأساسية**

2- في جدول الحل الأمثل للبرنامجين نجد:

- قيمة الدالة الاقتصادية في الحل الأمثل للبرنامجين تكون متساوية، وفي كلا الحالتين نأخذ قيمتها المطلقة.
- القيم المقابلة لمتغيرات القرار في البرنامج الأولي (x_j) والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل تساوي قيم متغيرات الفجوة (e_j) على وجه الترتيب في عمود الثوابت (b_i) للبرنامج الثنائي وبعكس الإشارة والعكس صحيح.
- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في البرنامج الأولي (s_i) والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل تساوي قيم متغيرات القرار (y_j) على وجه الترتيب في عمود الثوابت (b_i) للبرنامج الثنائي وبعكس الإشارة والعكس صحيح.
- قيم متغيرات القرار في البرنامج الأولي (x_j) والتي تظهر في عمود الثوابت (b_i)، تساوي القيم المقابلة

لمتغيرات الفجوة للبرنامج الثنائي (e_j) والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل، قيم المتغيرات الأخرى في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل فتأخذ قيمة الصفر (0).

- قيم متغيرات الفجوة للبرنامج الأولي (s_i) والتي تظهر في عمود الثوابت (b_i)، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات القرار للبرنامج الثنائي (y_i) والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل وبعكس الإشارة، أما قيم المتغيرات الأخرى في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل فتأخذ قيمة الصفر (0).
- قيمة تقاطع متغيرات القرار (x_j) في الأسطر مع متغيرات الفجوة (s_i) في الأعمدة في البرنامج الأولي تصبح قيمة تقاطع متغيرات القرار (y_i) في الأعمدة مع متغيرات الفجوة (e_j) في الأسطر في البرنامج الثنائي بنفس الترتيب وبعكس الإشارة والعكس صحيح.
- قيم متغيرات القرار (y_i) ومتغيرات الفجوة (e_j) في أعمدة جدول الحل للبرنامج الثنائي والتي تدخل ضمن الحل الأمثل تأخذ قيمة الصفر (0)، ما عدا الخانة التي تتقاطع فيها متغيرات القرار (y_i) ومتغيرات الفجوة (e_j) مع نفسها والتي تأخذ قيمة الواحد (1)، والعكس صحيح.
- في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يمكن الاستغناء عن أعمدة المتغيرات الاصطناعية (A_j) لأنها لا تؤثر على الحل الأمثل.
- في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يمكن الاستغناء عن أسطر متغيرات القرار (y_i) ومتغيرات الفجوة (e_j) التي لا تدخل في الحل الأمثل.

ملاحظات:

- إذا كان القيد في المسألة الأولية من الشكل $\sum a_{ij}x_j = b_i$ فإن المتغير y_i المرافق له في المسألة الثنائية يكون حرا أي $y_i \in (-\infty, +\infty)$، بمعنى آخر مقابل كل متغير فجوة معدوم في قيد المسألة، يقابله متغير أساس حر في المسألة الثنائية.
- إذا كان أحد المتغيرات x_j في المسألة الأولية حرا أي $x_i \in (-\infty, +\infty)$ فإن القيد رقم (i) المقابل في المسألة الثنائية يكون على الشكل $\sum a_{ij}y_i = c_j$ ، بمعنى آخر مقابل كل متغير أساس حر في المسألة الأولية متغير فجوة معدوم في المسألة الثنائية.
- إذا كان القيد في المسألة الأولية في حالة التعظيم على الشكل $\sum a_{ij}x_j \geq b_i$ يتم تحويله إلى الصيغة القانونية بضرب الطرفين في الإشارة (-)، فيصبح القيد على الشكل $-\sum a_{ij}x_j \leq -b_i$، ويكون المتغير y_i المرافق في الثنائية غير سالب أي $y_i \geq 0$.

- ثنائية البرنامج الثنائي هي البرنامج الأولي.
- إذا كان للبرنامج الأولي حل أمثل، فإن قيمة دالة الهدف في البرنامجين تكون متساوية.
- إذا كان حل البرنامج الأولي لا نهائي، فإن ثنائيته تكون متناقضة.
- إذا كان البرنامج الأولي متناقض، فإن البرنامج الثنائي يكون لا نهائي أو متناقض.
- يمكن إيجاد الحل للمسألة الثنائية ومعاملتها كأي مسألة برمجة خطية أولية، إلا أنه يمكن الحصول على قيم المتغيرات ودالة الهدف للمسألة الثنائية مباشرة، وذلك من الجدول الأخير الذي نحصل منه على الحل الأمثل للمسألة الأولية بالطريقة المبسطة Simplex.

مثال (01): أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الأولي التالي:

$$Max(Z) = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 40 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

نلاحظ أن عدد المتغيرات في البرنامج الأولي هو ثلاثة متغيرات، لذلك فإن عدد القيود في البرنامج الثنائي ستكون ثلاثة قيود، وأن عدد القيود في البرنامج الأولي هو قيدين إذن فعدد المتغيرات في البرنامج الثنائي هو متغيرين.

لو فرضنا أن المتغيرات في البرنامج الثنائي هي y_1 للقيد الأول و y_2 للقيد الثاني، فإن دالة الهدف للبرنامج الثنائي يمكن كتابتها بعد تحويلها من تعظيم (Max) إلى تقليل (Min) كما يلي:

$$Min(Z) = 12y_1 + 40y_2$$

إن معاملات المتغيرات $\boldsymbol{y_1 . y_2}$ هي الجانب الأيمن للقيد الأول والثاني، أما قيود البرنامج الثنائي ستكون كالتالي:

$$s/c \begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ 3y_1 + y_2 \geq 1 \\ (y_1 . y_2) \geq 0 \end{cases}$$

إن معامل المتغير الأول في القيد الأول في البرنامج الثنائي هو معامل المتغير الأول في القيد الأول في النموذج الأولي، أما معامل المتغير الثاني في القيد الأول في البرنامج الثنائي هو معامل المتغير الأول في

القيد الثاني في البرنامج الأولي وهكذا بالنسبة لبقية القيود، ولم تم ترتيب المسألة على شكل مصفوفة فإن كـــل عمود من أعمدة مصفوفة المسألة الأولية ستتحول إلى سطر في مصفوفة المسألة الثنائية، أما الجانب الأيمـــن للقيود أو الثوابت فهو معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الأولية، ويكتب البرنامج الثنائي كمايلي:

$$Min(Z) = 12y_1 + 40y_2$$

$$s/c \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ 3y_1 + y_2 \geq 1 \\ (y_1 . y_2) \geq 0 \end{cases}$$

مثال (02): أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الأولي التالي:

$$Max(Z) = 30x_1 + 40x_2$$

$$s/c \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 20 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

نلاحظ أن دالة الهدف من النوع تعظيم (Max)، وأن القيد الأول هو من النوع أكبر أو يساوي (≥)، وعليه يتم ضرب طرفي القيد الأول في المقدار (-1) كمايلي:

$$s/c \quad \begin{cases} -2x_1 - x_2 \leq -20 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

أما البرنامج الثنائي فيكون على الشكل التالي:

$$Min(Z) = -20y_1 + 15y_2$$

$$s/c \quad \begin{cases} -2y_1 + y_2 \geq 30 \\ -y_1 + 3y_2 \geq 40 \\ (y_1 . y_2) \geq 0 \end{cases}$$

مثال (03): أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الأولي التالي:

$$Max(Z) = 10x_1 + 8x_2 + 24x_3$$

$$s/c \quad \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

إذا كان أحد القيود أو جميعها على شكل مساواة (=)، يتم تحويل القيد إلى متراجحتين مختلفتين في الاتجـــاه، كما يلي:

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 4$$
$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 4$$

ولغرض جعل جميع القيود من النوع أقل أو يساوي (≤)، يتم ضرب المتراجحة الثانيـــة فـــي المقـــدار (-1) فتصبح كما يلي:

$$-4x_1 - 6x_2 - 2x_3 \leq -4$$

ويصبح البرنامج الأولي كما يلي:

$$Max(Z) = 10x_1 + 8x_2 + 24x_3$$
$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ -4x_1 - 6x_2 - 2x_3 \leq -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

أما البرنامج الثنائي فيكون على الشكل التالي:

$$Min(Z) = 4y_1 - 4y_2 + 10y_3$$
$$s/c \begin{cases} 4y_1 - 4y_2 + 2y_3 \geq 10 \\ 6y_1 - 6y_2 + 2y_3 \geq 8 \\ 2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \geq 24 \\ (y_1 . y_2 . y_3) \geq 0 \end{cases}$$

V. تمارين محلولة

التمرين الأول: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Min(Z) = 3x_1 + 10x_2$$
$$s/c \begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

❖ **المطلوب:** 1- إيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي.

2-إيجاد البرنامج الثنائي، ثم استنتاج الحل الأمثل له.

الحل:

1- إيجاد الحل الأمثل:

للقيام بعملية الحل نتبع الخطوات التالية:

- كتابة الشكل المعياري للبرنامج الخطي: وذلك بإضافة المتغيرات الراكدة والاصطناعية إلى القيود ودالة الهدف (Z):

$$Z - 5x_1 - 7x_2 + \mathbf{0}.\boldsymbol{S_1} + \mathbf{0}.\boldsymbol{S_2} - \boldsymbol{M}.\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{M}.\boldsymbol{R_2} = 0$$
$$5x_1 + x_2 - \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{R_1} = 10 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$
$$-2x_1 + 7x_2 - \boldsymbol{S_2} + \boldsymbol{R_2} = 14 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$
$$(x_1 . x_2 . S_1 . S_2 . R_1 . R_2) \geq 0$$

- صياغة دالة الهدف (Z) بدلالة المتغيرات القرارية (x_j) والمتغيرات الراكدة (S_i) فقط على النحو التالي:

من المعادلتين (1) و(2) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{R_1} &= 10 - 5x_1 - x_2 + \boldsymbol{S_1}\\ \boldsymbol{R_2} &= 14 + 2x_1 - 7x_2 + \boldsymbol{S_2}\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

نعوض قيم (R_1) و (R_2) الواردة في العلاقة (3) في دالة الهدف (Z) ينتج ما يلي:

$$Z - 3x_1 - 10x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 - M.(R_1 + R_2) = 0$$
$$Z - 3x_1 - 10x_2 - M.(10 - 5x_1 - x_2 + S_1 + 14 + 2x_1 - 7x_2 + S_2) = 0$$
$$Z - 3x_1 - 10x_2 - M.10 + M.5x_1 + M.x_2 - M.S_1 - M.14 - M.2x_1 + M.7x_2 - M.S_2 = 0$$
$$Z - (3 - 3M)x_1 - (10 - 8M)x_2 + M.S_1 + M.S_2 - 24.M = 0$$
$$Z + (-3 + 3M)x_1 + (-10 + 8M)x_2 - M.S_1 - M.S_2 = 24M$$

- إيجاد الحل الأساسي (الأولي): ويكون جدول الحل الأساسي كالآتي:

Basic Variables	**Non Basic Variables**						b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
R_1	5	1	−1	0	1	0	10	10
R_2	−2	7	0	−1	0	1	14	2
Z	(−3 + 3M)	(−10 + 8M)	−M	−M	0	0	24M	

3- تحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل: وتشمل الخطوات التالية:

- تحديد المتغير الداخل (سطر الارتكاز): مادامت المشكلة هي حالة تقليل فإن معامل المتغير هي القيمة (−10 + 8M)، و(x_2) هو المتغير الداخل.

- تحديد المتغير الخارج (عمود الارتكاز): إن أصغر قيمة موجبة هي 2، لذلك فإن السطر R_2 هو المتغير الخارج، وأن العنصر 7 هو العنصر المحوري (عنصر الإرتكاز)، وهو العنصر الذي يتقاطع عنده سطر

الارتكاز مع عمود الارتكاز.

- إيجاد قيم السطر المحوري (سطر الارتكاز القديم في الجدول الجديد): نقوم بقسمة قيم السطر للمتغير الخارج S_3 على العنصر المحوري 1، وذلك للحصول على السطر المحوري x_2 :

$$-\frac{2}{7} \quad 1 \quad 0 \quad -\frac{1}{7} \quad 0 \quad \frac{1}{7} \quad 2$$

- إيجاد قيم بقية أسطر الجدول: لإيجاد قيم بقية أسطر جدول الحل الجديد نستخدم الصيغة السابقة:

$$new\,(R_1) = [5 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 10] - (2)*[-\frac{2}{7} \quad 1 \quad 0 \quad -\frac{1}{7} \quad 0 \quad \frac{1}{7} \quad 2]$$

$$= \left[\frac{37}{7} \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1}{7} \quad 1 \quad -\frac{2}{7} \quad 8\right]$$

$$new\,(Z) = [(-3+3M) \quad (-10+8M) \quad -M \quad -M \quad 0 \quad 0 \quad 24M] - (-3)*[-\frac{2}{7} \quad 1 \quad 0 \quad -\frac{1}{7} \quad 0 \quad \frac{1}{7} \quad 2]$$

$$= \left[\frac{(-41+37M)}{7} \quad 0 \quad -M \quad \frac{(-10+M)}{7} \quad 0 \quad \frac{3}{7} \quad (20+8M)\right]$$

نسجل هذه القيم في جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non Basic Variables						b_i	b_i/x_1
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
R_1	$\frac{37}{7}$	0	-1	$\frac{1}{7}$	1	$-\frac{2}{7}$	8	$\frac{56}{37}$
x_2	$-\frac{2}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	2	-7
Z	$\frac{(-41+37M)}{7}$	0	$-M$	$\frac{(-10+M)}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$(20+8M)$	

- اختبار أمثلية الحل والوصول إلى الحل الأمثل: يعتبر الحل أمثلا في حالة التقليل (حالة هذا التمرين)، عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة سالبة أو معدومة أي $\Sigma Z \leq 0$، وهو ما لم يتحقق بعد بسبب وجود قيم موجبة في السطر الجديد لـ Z، وبالتالي يجب تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة، نحصل على جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
x_1	1	0	$-\frac{7}{37}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{7}{37}$	$-\frac{2}{37}$	$\frac{56}{37}$
x_2	0	1	$-\frac{2}{37}$	$-\frac{35}{259}$	$\frac{2}{37}$	$\frac{51}{49}$	$\frac{90}{37}$
Z	0	0	$-\frac{41}{37}$	$-\frac{37}{47}$	$\frac{(41-37M)}{37}$	$\frac{(29-54M)}{259}$	$\frac{1068}{37}$
			حل البرنامج الثنائي بالقيمة المطلقة				

نلاحظ أن كل معاملات دالة الهدف أصبحت سالبة أو معدومة أي $\Sigma Z \leq 0$، وبالتالي قد وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = \frac{1068}{37}\ ,\quad x_1 = \frac{56}{37},\quad x_2 = \frac{90}{37},\quad S_1 = 0,\quad S_2 = 0$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** لتحقيق المؤسسة أقل تكلفة ممكنة والمقدرة بـ $\frac{1068}{37}$ دج ($Z=\frac{1068}{37}$) يجب على المؤسسة إنتاج $\frac{56}{37}$ وحدة من المنتوج الأول ($x_1 = \frac{56}{37}$)، وإنتاج $\frac{90}{37}$ وحدة من المنتوج الثاني ($x_2 = \frac{90}{37}$)، مع عدم بقاء طاقة عاطلة في القيدين الأول والثاني ($S_1 = 0, S_2 = 0$) .

2- إيجاد البرنامج الثنائي وجدول الحل الأمثل له:

يمكن صياغة البرنامج الثنائي على الشكل التالي: $Max(Z) = 10y_1 + 14y_2$

$$s/c \quad \begin{cases} 5y_1 - 2y_2 \leq 3 \\ y_1 + 7y_2 \leq 10 \\ (y_1 \cdot y_2) \geq 0 \end{cases}$$

ومن خلال جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي يمكن إعداد جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي كما يلي:

- قيمة الدالة الاقتصادية في الحل الأمثل للبرنامجين تكون متساوية، أي: ($Z=W=\frac{1068}{37}$).
- القيم المقابلة لـ (x_j) والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل تساوي قيم (e_j) على وجه الترتيب في العمود (b_i) للبرنامج الثنائي وبعكس الإشارة (e_1=0) و(e_2=0)،وعدم وجودها في الحل الأمثل.
- القيم المقابلة لـ (s_i) والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل تساوي قيم (y_j) على وجه الترتيب في العمود (b_i) للبرنامج الثنائي وبعكس الإشارة أي: ($y_1=\frac{41}{37}$) و($y_2=\frac{37}{47}$).
- قيم (x_j) والتي تظهر في العمود (b_i)، تساوي القيم المقابلة لـ (e_j) والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل، أما قيم المتغيرات الأخرى في السطر الأخير فتأخذ قيمة الصفر (0).
- قيم (s_i) والتي تظهر في العمود (b_i)، تساوي القيم المقابلة لـ (y_i) والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل وبعكس الإشارة، أما قيم المتغيرات الأخرى في السطر الأخير فتأخذ قيمة الصفر (0).
- قيمة تقاطع (x_j) في الأسطر مع (s_i) في الأعمدة في البرنامج الأولي تصبح قيمة تقاطع (y_i) في الأعمدة مع (e_j) في الأسطر في البرنامج الثنائي بنفس الترتيب وبعكس الإشارة.
- قيم (y_i) و (e_j) والتي تدخل ضمن الحل الأمثل تأخذ قيمة الصفر (0)، ما عدا الخانة التي تتقاطع فيها (y_i) و(e_j) مع نفسها والتي تأخذ قيمة الواحد (1).

Basic Variables	Non Basic Variables				b_i
	y_1	y_2	e_1	e_2	
y_1	1	0	$\frac{7}{37}$	$\frac{2}{37}$	$\frac{41}{37}$
y_2	0	1	$-\frac{1}{37}$	$\frac{35}{259}$	$\frac{37}{47}$
Z	0	0	$\frac{56}{37}$	$\frac{90}{37}$	$\frac{1068}{37}$
			حل البرنامج الأولي		

وبالتالي قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = \frac{1068}{37}\ ,\quad y_1 = \frac{41}{37},\quad y_2 = \frac{37}{47},\quad e_1 = 0,\quad e_2 = 0$$

التمرين الثاني: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Max(Z) = x_1 + 3x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 4 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

❖ **المطلوب:** 1- إيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي.

2- إيجاد البرنامج الثنائي، ثم استنتاج الحل الأمثل له

الحل:

1- إيجاد الحل الأمثل: للقيام بعملية الحل نتبع الخطوات التالية:

- كتابة الشكل المعياري للبرنامج الخطي: إذ يصبح البرنامج على الشكل التالي:

$$Z - 3x_1 - 3x_2 - \mathbf{0}.\boldsymbol{S_1} - \mathbf{0}.\boldsymbol{S_2} - \mathbf{0}.\boldsymbol{S_3} = 0$$

$$x_1 + \boldsymbol{S_1} = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{S_2} = 10$$

$$x_2 + \boldsymbol{S_3} = 4$$

$$(x_1 . x_2 . S_1 . S_2 . S_3) \geq 0$$

- إيجاد الحل الأساسي (الأولي): ويكون جدول الحل الأساسي كالآتي:

Basic Variables	Non Basic Variables					b_i	b_i/x_2
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		
S_1	1	0	1	0	0	5	∞
S_2	1	2	0	1	0	10	5
S_3	0	**1**	0	0	1	4	4
Z	−1	−3	0	0	0	0	

4- تحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل: وتشمل الخطوات التالية:

- تحديد المتغير الداخل (سطر الارتكاز): مادامت المشكلة هي حالة تعظيم فإن معامل المتغير هي القيمة (−3)، و(x_2) هو المتغير الداخل.

- تحديد المتغير الخارج (عمود الارتكاز): إن أصغر قيمة موجبة هي 4، لذلك فإن السطر S_3 هو المتغير الخارج، وأن العنصر 1 هو العنصر المحوري (عنصر الإرتكاز)، وهو العنصر الذي يتقاطع عنده سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز.

- إيجاد قيم السطر المحوري (سطر الارتكاز القديم في الجدول الجديد): نقوم بقسمة قيم السطر للمتغير الخارج S_3 على العنصر المحوري 1، وذلك للحصول على السطر المحوري x_2 :

0 1 0 0 0 1 4

- إيجاد قيم بقية أسطر الجدول: لإيجاد قيم بقية أسطر جدول الحل الجديد نستخدم الصيغة السابقة:

$$new\ (S_2) = [1\quad 2\quad 0\quad 1\quad 0\quad 10] - (2)*[0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 4]$$
$$= [1\quad 0\quad 0\quad 1\quad -2\quad 2]$$
$$new\ (Z) = [-1\quad -3\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0] - (-3)*[0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 4]$$
$$= [-1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 3\quad 12]$$

نسجل هذه القيم في جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	Non Basic Variables					b_i	b_i/x_1
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		
S_1	1	0	1	0	0	5	5
S_2	**1**	0	0	1	−2	2	2
x_2	0	1	0	0	1	4	∞
Z	−1	0	0	0	3	12	

- اختبار أمثلية الحل والوصول إلى الحل الأمثل: يعتبر الحل أمثلا في حالة التعظيم (حالة هذا التمرين)، عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة موجبة أو معدومة أي $\Sigma Z \geq 0$، وهو ما لم يتحقق بعد بسبب وجود قيم سالبة $(-1 \geq 0)$ في السطر الجديد لـــ Z، وبالتالي يجب تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة، نحصل على جدول الحل الجديد كالآتي:

Basic Variables	***Non Basic Variables***					b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	0	0	1	-1	2	3
x_1	1	0	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	0	1	4
Z	0	0	0	1	1	14

نلاحظ أن كل معاملات دالة الهدف أصبحت موجبة أو معدومة أي $\Sigma Z \geq 0$، وبالتالي قد وصلنا إلى الحل الأمثل، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = 14\,,\quad x_1 = 2,\quad x_2 = 4,\ S_1 = 3,\quad S_2 = 0,\quad S_3 = 0$$

❖ **التفسير الاقتصادي للنتائج:** لحصول المؤسسة على أكبر ربح ممكن والمقدر بـــ 14 دج (Z=14) يجب على المؤسسة إنتاج وحديتن من المنتوج الأول $(x_1 = 2)$، و إنتاج 4 وحدات من المنتوج الثاني $(x_2 = 4)$، مع بقاء طاقة عاطلة في القيد الأول $(S_1 = 3)$، وعدم بقائها في القيدين الثاني والثالث $(S_2 = 0,\ S_3 = 0)$.

2- **إيجاد البرنامج الثنائي وجدول الحل الأمثل له:**

يمكن صياغة البرنامج الثنائي على الشكل التالي:

$$Min(Z) = 5y_1 + 10y_2 + 4y_3$$

$$s/c \quad \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 1 \\ 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ (y_1 . y_2 . y_3) \geq 0 \end{cases}$$

من خلال جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي يمكن استنتاج جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي بنفس الخطوات المتبعة في التمرين الأول فنحصل على الجدول التالي:

Basic Variables	Non Basic Variables					B_i
	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	
y_2	1	1	0	-1	0	1
y_3	-2	0	1	2	-1	1
W	3	0	0	-2	-4	14
				حل البرنامج الأولي بالقيمة المطلقة		

وبالتالي قيم الحل الأمثل للبرنامج الثنائي هي:

$$Z = 14\,,\quad y_1 = 0,\quad y_2 = 1,\quad y_3 = 1,\ S_1 = 0,\quad S_2 = 0$$

VI. تمارين غير محلولة

التمرين الأول: أوجد البرنامج الثنائي لكل البرامج الخطية في تمارين المحور الأول والثاني والثالث.

التمرين الثاني: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Min(Z) = 3x_1 + 10x_2$$

$$s/c \quad \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ -2x_1 - 7x_2 \leq -14 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

❖ **المطلوب:** 1- إيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي.

2- إيجاد البرنامج الثنائي، ثم إيجاد الحل الأمثل له وحدد العلاقة بين الحلين.

التمرين الثالث: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Min(Z) = -x_1 + x_2$$

$$s/c \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq -2 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

❖ **المطلوب:** 1- إيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي.

2- إيجاد البرنامج الثنائي، ثم إيجاد الحل الأمثل له وحدد العلاقة بين الحلين.

المحور الخامس: تحليل الحساسية
Sensitivity Analysis

لقد افترضنا سابقا أن جميع الظروف المحيطة بالمؤسسة (المصادر المتاحة، التكاليف، الأرباح، اليد العاملة، المواد الأولية،...إلخ) تكون ثابتة أي التأكد التام (فرضية من فرضيات البرمجة الخطية) من قيمها من أجل الوصول إلى الحل الأمثل، إلا أنه في معظم المشاكل العملية تكون هذه العناصر غير معروفة بصورة أكيدة، وهذه التغيرات التي تطرأ على النموذج الأولي (مثل زيادة في معاملات متغيرات دالة الهدف، حذف أو إضافة متغير جديد،...إلخ)، وإعادة حل النموذج (بعد التغيرات التي حصلت) يحتاج إلى وقت طويل، لذلك تستخدم طريقة تحليل الحساسية أو بما تعرف بتحليل ما بعد الأمثلية مما يساعد على عدم إعادة الحل بكامله.

I. مفهوم تحليل الحساسية

مما ذكر سابقا يمكن القول أن تحليل الحساسية هو عبارة عن طريقة تسمح بدراسة تأثير التغيرات (غير المتوقعة) الحاصلة في مكونات المشكلة أو النموذج الأولي، والتي تأخذ قيم متعددة وفق الظروف والأحداث التي تطرأ باستمرار، إلا أن هذه التغيرات تتحدد حسب ظروف السوق، منها التي تتغير بإرادة المؤسسة أي أن لها الحرية في تغييرها، وأخرى لا تكون تحت تصرف المؤسسة أي انها خارجة عن سيطرتها، لهذا تلجأ الجهة المختصة إلى القيام ببعض التحليلات والدراسات التي من شأنها أن توفر لها معلومات إضافية عن كافة متغيرات النموذج، وتشمل هذه التحليلات ما يلي:

- التغير في معاملات دالة الهدف c_j؛
- التغير في الموارد المتاحة للقيود b_i ؛
- التغير في عدد المتغيرات (إدخال أو إخراج متغير أو متغيرات من المسألة)؛
- التغير في عدد القيود (إدخال أو إخراج قيد أو قيود من المسألة)؛
- التغير في المعاملات الفنية للقيود a_{ij}.

II. التغير في معاملات دالة الهدف c_j

لقد افترضنا سابقا أن معاملات دالة الهدف تبقى ثابتة، وهذا يؤدي إلى أن برنامج الحل الأمثل يبقى أيضا ثابتا وصحيحا، ولكن في الواقع فإن هذه المعاملات لا تبقى ثابتة، فهناك عوامل سوقية تؤدي إلى تغيرها، وهذا ما يؤدي إلى تغيير الحل الأمثل (تغيير برنامج الإنتاج الأمثل)، فهناك مجال معين تتغير فيه معاملات

دالة الهدف يبقى خلاله الحل الأمثل صحيحا، أما خارج هذا المجال فإن برنامج الإنتاج الأمثل السابق لا يصبح أمثلا ويجب الانتقال إلى وضعية مثلى أخرى وحساب برنامج أمثل آخر.

لذلك من المهم تحديد المجال (الحدود) التي يمكن أن يتغير فيها الربح الوحدوي، سعر البيع، تكلفة الإنتاج أو غيرها من المؤشرات في السوق، والتي يعبر عنها بالمعامل (c_j)، بدون أن يؤثر ذلك على برنامج النشاط الأمثل الحالي(x_j).

أما التغير خارج ذلك المجال، فإنها تؤدي إلى الانتقال من النشاط الأمثل الحالي، وبالتالي تغيير برنامج الإنتاج الأمثل من أجل الوصول إلى الهدف، لأن القيمة الحالية لها لا تشكل القيمة المثلى في ظل ظروف السوق الجديدة، ويتم معرفة ذلك بإعادة حل النموذج الخطي باستعمال المعطيات الجديدة.

1- التغير في معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية: قد تحدث التغيرات في معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية، أي تلك المتغيرات التي لا تدخل ضمن الحل الأمثل.

<u>مثال (01):</u> إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Max(Z) = 300x_1 + 500x_2 + 400x_3$$

$$s/c \begin{cases} 12x_1 + 10x_2 + 8x_3 \leq 1800 \\ 15x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 1800 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 900 \\ x_1 \geq 10 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

إذا علمت أن جدول الحل الأمثل لهدا البرنامج هو:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**							b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
S_1	0	-2	0	1	$-\frac{4}{5}$	0	0	360
x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{2}$	165
S_3	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	540
x_1	1	0	0	0	0	0	-1	10
Z	0	100	0	0	40	0	300	69000

نفترض أن ربح المنتج الثاني x_2 قد تغير بمقدار (α)، ما هو مقدار هذا التغيير الذي يؤثر أو لا يؤثر علـــى الحل الأمثل السابق؟

الحل:

نلاحظ أن المتغير الثاني x_2 لا يدخل ضمن الحل الأمثل وبالتالي فهو متغير غير أساسي، ويمكن التعبيـــر عن التغير في معامل المنتج الثاني بـــ (500+α) ، بالتالي تصبح دالة الهدف بالشكل التالي:

$$Max(Z) = 300x_1 + (500 + \alpha)x_2 + 400x_3$$

ويتم إدخال دالة الهدف بنفس الطريقة التي استعملت في حل المثال ومنه يصبح جدول الحل الأمثل كما يلي:

Basic Variables	Non-Basic Variables							b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
S_1	0	-2	0	1	$-\frac{4}{5}$	0	0	360
x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{2}$	165
S_3	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	540
x_1	1	0	0	0	0	0	-1	10
Z	0	$(100-\alpha)$	0	0	40	0	300	69000

حتى لا يتغير أساس جدول الحل الأمثل يجب أن لا يكون هناك أي عنصر سالب أو معدوم في الســـطر **Z** ، أي أن ($100 \geq \alpha$)، وهذا معناه أن أي ارتفاع في ربح المنتج الثاني يقل عن 100 وحدة نقدية يبقي الكمية المنتجة منه معدومة، أما إذا كانت الزيادة في ربح المنتج تساوي أو تفوق 100 فإنه يصبح من الأفضل إنتـــاج المنـــتج الثاني، وهذا منطقي لأن تكلفة الفرصة البديلة فيما يخص هذا المنتج هي100 وبالتالي لا يتم إنتاجه إلا إذا كانت هناك زيادة في ربحه تغطي تكلفة الفرصة البديلة.

مثال (02): إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Max(Z) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 340 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 \leq 460 \\ x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 420 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

إذا علمت أن جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج هو:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	55
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	200
Z	4	0	0	1	2	0	1260

نفترض أن ربح المنتج الأول x_1 قد تغير بمقدار (α)، ما هو مقدار هذا التغيير الذي يؤثر أو لا يؤثر على الحل الأمثل السابق؟

الحل:

نلاحظ أن المتغير الأول x_1 لا يدخل ضمن الحل الأمثل وبالتالي فهو متغير غير أساسي، ويمكن التعبير عن التغير في معامل المنتج الأول بـ (3+α) ، بالتالي تصبح دالة الهدف بالشكل التالي:

$$Max(Z) = (3 + \alpha)x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

ويتم إدخال دالة الهدف في الجدول الأمثل بنفس الطريقة التي استعملت في حل المثال ومنه يصبح الجدول بالشكل التالي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	55
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	200
Z	$(4-\alpha)$	0	0	1	2	0	1260

حتى لا يتغير أساس جدول الحل الأمثل يجب أن لا يكون هناك أي عنصر سالب أو معدوم في السطر **Z**، أي أن ($\alpha \leq 4$)، وهذا معناه أن أي ارتفاع في ربح المنتج الأول يقل عن 4 وحدات نقدية يبقي الكمية المنتجة منه معدومة، أما إذا كانت الزيادة في ربح المنتج تساوي أو تفوق 4 فإنه يصبح من الأفضل إنتاج المنتج الأول، وهذا

منطقي لأن تكلفة الفرصة البديلة فيما يخص هذا المنتج هي 4 وبالتالي لا يتم إنتاجه إلا إذا كانت هناك زيادة في ربحه تغطي تكلفة الفرصة البديلة.

2- التغير في معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية: بالمقابل قد تحدث التغيرات في معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية، أي تلك المتغيرات التي تدخل ضمن الحل الأمثل.

مثال (03): بالرجوع للمثال (02) نفترض أن ربح المنتج الثاني قد تغير بمقدار (α)، ما هو مقدار هذا التغيير الذي يؤثر أو لا يؤثر على الحل الأمثل السابق؟

الحل:

نلاحظ أن المتغير الثاني x_2 يدخل ضمن الحل الأمثل وبالتالي فهو متغير أساسي، ويمكن التعبير عن التغير في معامل المنتج الثاني بـ ($2+\alpha$)، بالتالي تصبح دالة الهدف بالشكل التالي:

$$Max(Z) = 3x_1 + (2 + \alpha)x_2 + 5x_3$$

ويتم إدخال دالة الهدف في الجدول الأمثل بنفس الطريقة التي استعملت في حل المثال ومنه يصبح الجدول بالشكل التالي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	55
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	200
Z	$(4-\frac{1}{4}\alpha)$	0	0	$(4-\frac{1}{2}\alpha)$	$(2-\frac{1}{4}\alpha)$	0	$(1260 + 100\alpha)$

حتى لا يتغير أساس جدول الحل الأمثل يجب أن لا يكون هناك أي عنصر سالب أو معدوم في السطر **Z** كما يلي: $\left(4-\frac{1}{4}\alpha\right) \geq 0, \quad \left(4-\frac{1}{2}\alpha\right) \geq 0, \ (2-\frac{1}{4}\alpha) \geq 0$

أي أن: $\alpha \in [-2, +8]$

وهذا معناه أن أي زيادة تقل أو تساوي 8 وحدات نقدية و أي انخفاض يزيد أو يساوي وحدتين نقديتين يبقيان أساس جدول الحل الأمثل بدون تغيير.

III . التغير في الموارد المتاحة للقيود b_i

لقد اعتبرنا في المحاور السابقة أن الموارد المتاحة b_i (الطرف الأيمن للقيود) المعبر عن كمية المـــوارد المستعملة في النشاط يبقى ثابتا، لكن هذا الاعتبار هو في الحقيقة غير متاح دائما نظـــرا لأن هـــذه الكميـــات تتغير باستمرار وذلك بتغير ظروف نشاط كل مؤسسة.

وفي هذه الحالة التي يمكن أن تتغير فيها هذه الكميات وتحديد الوضعيات المثلى للنشاط التي يمكن أن تصل إليها المؤسسة نتيجة تغير كميات الموارد المتاحة لديها.

مثال (04): بالرجوع للمثال (01) نفترض أن الموارد المتاحة في القيد الأول قد تغيرت بمقدار (α)، ما هـــو مقدار هذا التغيير الذي يؤثر أو لا يؤثر على الحل الأمثل السابق؟

الحل:

نتيجة التغيير السابق يصبح القيد الأول بالشكل التالي:

$$12x_1 + 10x_2 + 8x_3 \leq (1800 + \alpha)$$

بعد إدخال المتغير في جدول الحل الأمثل نقوم بحل المسألة وذلك بإضافة أعمدة جديدة بجانب عمود المـــوارد المتاحة ويكون عدد هذه الأعمدة حسب عدد الموارد المتاحة ممكنة التغيير ومن ثم نحصل على الحل الأمثـــل، ومنه نتحصل على ما يلي:

Basic Variables	Non-Basic Variables							b_i	A_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4		
S_1	0	-2	0	1	$-\frac{4}{5}$	0	0	360	360-4⁄5α
x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{2}$	165	165+1⁄10α
S_3	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	540	540-1⁄5α
x_1	1	0	0	0	0	0	-1	10	10
Z	0	100	0	0	40	0	300	69000	(69000+40α)

يمكن الحصول على عناصر العمود الأخير كما يلي:

$$(1800 + \alpha) \times (-4/5) + (-10 \times 0) + 1800 = 360 - 4/5\,\alpha$$
$$(1800 + \alpha) \times (-1/5) + (-10 \times 0) + 0 = 165 + 1/10\,\alpha$$
$$(1800 + \alpha) \times (-1/5) + (-10 \times 0) + 0 = 540 - 1/5\,\alpha$$
$$(1800 + \alpha) \times 0 + (-10 \times -1) + 0 = 10$$

حتى يبقى الحل حلا أمثلا لا بد أن تكون كل عناصر العمود الأخير غير سالبة،(ما عدا طبعا العنصر الموجود في سطر دالة الهدف والذي يدل على قيمة الجديدة لدالة الهدف وبالتالي لا يهم إن كان موجبا أو سالبا).

$$360 - {}^{4}/_{5}\,\alpha \geq 0,\quad 165 + {}^{1}/_{10}\,\alpha \geq 0\ ,540 - {}^{1}/_{5}\,\alpha \geq 0$$

إذن حتى لا يتغير الحل الأمثل لابد من أن: $\alpha \in [-1650, +450]$، وهذا معنـــاه أن أي زيـــادة تفـــوق أو تساوي 450 في الطاقة الإنتاجية، وأي انخفاض لا يزيد أو يساوي 1650 في الطاقة الإنتاجية تبقيان الحل أمثلا.

<u>مثال (05)</u>: بالرجوع للمثال (02) نفترض أن الموارد المتاحة في القيد الأول قد تغيرت بمقدار (α)، ما هو مقدار هذا التغيير الذي يؤثر أو لا يؤثر على الحل الأمثل السابق؟

<u>الحل:</u>

نتيجة التغيير السابق يصبح القيد الأول بالشكل التالي:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq (240 + \alpha)$$

بعد إدخال المتغير في جدول الحل الأمثل نقوم بحل المسألة وذلك بإضافة أعمدة جديدة بجانب عمود الموارد المتاحة ويكون عدد هذه الأعمدة حسب عدد الموارد المتاحة ممكنة التغيير ومن ثم نحصل على الحل الأمثـــل، ومنه نتحصل على ما يلي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i	A_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	55	$55 + \alpha$
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	200	$200 - 2\alpha$
Z	4	0	0	1	2	0	1260	$(1260 + \alpha)$

يمكن الحصول على عناصر العمود الأخير كما يلي:

$$(4 + \alpha)\ x\ ({}^{1}/_{2}) + (460x - {}^{1}/_{2}) = 55 + {}^{1}/_{2}\,\alpha$$

$$(340 + \alpha)\ x\ (0) + (460x\,{}^{1}/_{2}) = 230$$

$$(340 + \alpha)\ x\ (-2) + (460x1) + 420 = 200 - 2\alpha$$

$$(340 + \alpha)\ x\ 0 + (460\ x2) = 1260 + \alpha$$

حتى يبقى الحل حلا أمثلا لا بد أن تكون كل عناصر العمود الأخير غير سالبة، (ما عدا طبعا العنصر الموجود في سطر دالة الهدف والذي يدل على قيمة الجديدة لدالة الهدف وبالتالي لا يهم إن كان موجبا أو سالبا).

$$55 + {}^{1}/_{2}\,\alpha \geq 0,\quad 200 - 2\alpha \geq 0$$

إذن حتى لا يتغير الحل الأمثل لابد من أن: $\alpha \in [-110, +100]$، وهذا معناه أن أي زيادة تفوق أو تساوي 100 في الطاقة الإنتاجية، وأي انخفاض لا يزيد أو يساوي 110 في الطاقة الإنتاجية تبقيان الحل أمثلا.

ملاحظات:

- إذا ارتفعت قيمة مورد ما، حيث أن هذا المورد لم يتم استخدامه كليا في جدول الحل الأمثل، فإن متغيرات الأساس لن تتغير مهما كان مقدار الزيادة، وإنما يكون التغير (الزيادة) فقط على مستوى متغيرات الفجوة.
- إذا انخفضت قيمة مورد ما، حيث أن هذا المورد لم يتم استخدامه كليا في جدول الحل الأمثل، فإنه يجب أن لا يكون مقدار الانخفاض أقل ما تحتاجه المؤسسة لإنتاج قيم متغيرات القرار (متغيرات الأساس).

IV. إدخال قيد أو قيود جديدة للمسألة

في هذه الحالة نفترض أننا تحصلنا على الحل الأمثل ونريد معرفة آثار إدخال قيد جديد في المسألة، فإذا افترضنا أن هناك نوع جديد من المدخلات لم نأخذه بعين الاعتبار عند البدء في البحث عن الحل الأمثل(قد نكون ظننا أن هذا النوع من المدخلات بالذات موجود بكميات معتبرة وبالتالي لا يمكن أن يؤثر على النتائج النهائية، ثم تبين أن هناك احتمال أن يكون لهذا النوع من المدخلات تأثير على الحل الأمثل)، فما هي أدنى كمية من هذا النوع من المدخلات يجب توفيرها حتى يبقى الحل المتحصل عليه حلا أمثلا.

مثال (06): بالرجوع إلى المثال (01) ونفترض أنه لا بد من إضافة قيد خاص بنوع آخر من المدخلات، حيث أن كل وحدة من C, B, A تتطلب على التوالي 12، 15، 12 وحدة من هذا النوع من المدخلات، ما هي الكمية الدنيا من هذا المورد التي يجب توفيرها حتى يبقى الحل المتحصل عليه أمثلا؟

الحل:

حسب المعطيات السابقة فإن القيد الذي يجب إدخاله هو كالتالي:

$$12x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq \alpha$$

إن إدخال قيد جديد في المسألة يترجم بإدخال سطر إضافي في الجدول وليكن السطر S_5 هو المتغير الأساسي الخاص بهذا القيد الجديد، لا بد من الإشارة هنا إلى أن العنصر الذي يهمنا أكثر b_5، لذا يمكننا تجاهل العناصر الأخرى وحساب قيمة b_4 فقط، لكن في بعض الأحيان قد نحتاج إلى كل العناصر ونحسبها كالآتي:

$$a_{51} = 15 - [(12)x(3/2) + (12)x(0)] = -3$$

$$a_{52} = 0 - [(12)x(1/10) + (12)x(0)] = -6 / 5$$

$$a_{53} = 0 - [(12)x(3/2) + (12)x(-1)] = -6$$

$$b_5 = \alpha - [(12)x(165) + (12)x(10)] = \alpha - 2100$$

فيصبح جدول الحل الأمثل كما يلي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**							b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
S_1	0	-2	0	1	$-\frac{4}{5}$	0	0	360
x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{2}$	165
S_3	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	540
x_1	1	0	0	0	0	0	-1	10
S_5	0	-3	0	0	$-\frac{6}{5}$	0	-6	$(\alpha - 2100)$
Z	0	100	0	0	40	0	300	69000

وحتى يبقى الجدول السابق أمثلا يكفي أن يكون $b_4 \geq 0$ أي أن $\alpha \geq 2100$، وهذا معناه أن أدنى كمية يجب توفيرها من النوع الجديد من المدخلات يجب أن لا تقل عن 2100 وحدة.

مثال (07): بالرجوع إلى المثال (02) ونفترض أنه لا بد من إضافة قيد خاص بنوع آخر من المدخلات، حيث أن كل وحدة من C, B, A تتطلب على التوالي 2، 1، 2 وحدة من هذا النوع من المدخلات، ما هي الكمية الدنيا من هذا المورد التي يجب توفيرها حتى يبقى الحل المتحصل عليه أمثلا؟

الحل:

حسب المعطيات أعلاه فإن القيد الذي يجب إدخاله هو كالتالي:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq \alpha$$

إن إدخال قيد جديد في المسألة يترجم بإدخال سطر إضافي في الجدول وليكن السطر S_4 هو المتغير الأساسي الخاص بهذا القيد الجديد، لا بد من الإشارة هنا إلى أن العنصر الذي يهمنا أكثر b_4، لذا يمكننا تجاهل العناصر الأخرى وحساب قيمة b_4 فقط، لكن في بعض الأحيان قد نحتاج إلى كل العناصر ونحسبها كالآتي:

$$a_{41} = 2 - [(1)x(-1/4) + (2)x(3/2)] = -3/4$$
$$a_{42} = 0 - [(1)x(1/2) + (5)x(0)] = -1/2$$
$$a_{43} = 0 - [(1)x(1/2) + (2)x(1/2)] = -3/4$$
$$b_4 = \alpha - [(1)x(55) + (2)x(230)] = \alpha - 515$$

فيصبح جدول الحل الأمثل كما يلي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	55
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	200
S_4	$-\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$(\alpha - 515)$
Z	4	0	0	1	2	0	1260

وحتى يبقى الجدول السابق أمثلا يكفي أن يكون $b_4 \geq 0$ أي أن $\alpha \geq 515$، وهذا معناه أن أدنى كمية يجب توفيرها من النوع الجديد من المدخلات يجب أن لا تقل عن 515 وحدة.

V. إخراج قيد أو قيود من المسألة

هذه المرة نفترض أننا تحصلنا على الحل الأمثل ونريد معرفة آثار إخراج قيد من المسألة، فإذا افترضنا أن نوعا معينا من المدخلات لا يكون له تأثير في البحث عن الحل الأمثل (قد نظن في بداية الأمر أن هذا النوع من المدخلات بالذات موجود بكميات محدودة وبالتالي من الممكن أن يؤثر على النتائج النهائية) ثم تبين أن هناك احتمال أن لا يكون لهذا النوع من المدخلات أي تأثير على الحل الأمثل، فما هو تأثير إخراج هذا القيد من المسألة على الحل المحصل عليه؟ هنا قد تواجهنا حالة من الحالتين التاليتين:

1- متغير الطاقة العاطلة (أو متغير الفجوة) الخاص بالقيد الذي نريد إخراجه يكون في الأساس في جـــدول الحل الأمثل: في هذه الحالة نقوم فقط بشطب السطر الخاص به في الجدول.

<u>مثال (08)</u>: بالرجوع إلى المثال (02) ونفترض أن أننا نريد معرفة ما هو تأثير إسقاط القيد الثالث على الحل النهائي.

<u>الحل:</u>

حسب جدول الحل الأمثل فإن متغير الطاقة العاطلة الخاص بهذا القيد S_3 موجود في الأساس، وهذا معناه أن الحل الأمثل لا يتطلب استغلال كل المدخلات من النوع الثالث وبالتالي إذا افترضنا أن هـــذا النـــوع مـــن المدخلات من الممكن أن يصبح موجودا بكميات كبيرة، فهذا لا يغير أي شيء في الحل الأمثل السابق.

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	55
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	200
Z	4	0	0	1	2	0	1260

2- متغير الطاقة العاطلة (متغير الفجوة) الخاص بالقيد الذي نريد إخراجه يكون خارج الأساس في جدول الحل الأمثل: في هذه الحالة نقوم أولا بإدخاله في الأساس باختيار العمود الذي يكون موجـــودا فيـــه كعمـــود الارتكاز، ثم نقوم بشطب السطر الخاص به في الجدول، ونواصل حتى نحصل على الحل الأمثل الجديد.

<u>مثال (09)</u>: بالرجوع إلى المثال (02) ونفترض أن أننا نريد معرفة ما هو تأثير إسقاط القيد الثاني على الحل النهائي.

<u>الحل:</u>

حسب جدول الحل الأمثل فإن متغير الطاقة العاطلة الخاص بهذا القيد S_2 موجود خارج الأســـاس، وهـــذا معناه أن الحل الأمثل يتطلب استغلال كل المدخلات من النوع الثاني، وبالتالي إذا افترضنا أن هذا النوع مـــن المدخلات من الممكن أن يصبح موجودا بكميات كبيرة، فهذا قد يكون له تأثير مباشر على الحـــل المتحصـــل عليه من قبل، لمعرفة ما هو هذا التأثير نقوم أولا بإدخال S_2 في الأساس.

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	55
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	-2	**1**	1	200
Z	4	0	0	1	2	0	1260

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	105
x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	130
S_2	2	0	0	-2	1	1	200
Z	0	0	0	5	0	-2	860

بعد إدخال S_2 إلى الأساس نقوم بشطب السطر الخاص به، وبما أن الجدول لم يعد الأمثل نواصل في البحث عن الحل الأمثل حتى الحصول على الحل الجديد.

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
S_3	1	4	0	0	0	1	420
x_3	1	2	1	1	0	0	340
Z	2	8	0	5	0	0	1700

حسب الجدول السابق فإن الحل الأمثل أصبح كالتالي:

$$Z = 1700,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 340,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 420$$

VI. إدخال متغير أو متغيرات جديدة للمسألة

هنا نفترض أننا تحصلنا على الحل الأمثل ونريد معرفة آثار إدخال متغير جديد في النموذج، لو افترضنا نوعا معينا من المنتجات ارتفع الطلب عليه في السوق، والمؤسسة بإمكانها إنتاجه، فالسؤال هنا ما هو أدنى ربح خاص بهذا النوع يجعل المؤسسة تقبل بإنتاجه.

مثال (10): بالرجوع للمثال (01) بحيث المنتوج الجديد يتطلب على التوالي 10، 16، 3 من المدخلات السابقة، بحيث يتم إضافة قيد جديد خاص بالمنتج الجديد في البرنامج الثنائي، بحيث أن (α) يعبر عن الربح الخاص بالمنتوج، وبما أن المتغير في النموذج الأصلي يقابله قيد في النموذج المقابل فيصبح القيد بالشكل التالي $10y_1 + 16y_2 + 3y_3 \geq \alpha$ ، ويتم إدراج هذا القيد في جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل بعد تحويله إلى الشكل ($\leq$) بنفس طريقة إدخال قيد جديد في البرنامج الأولي: $-10y_1 - 16y_2 - 3y_3 \leq -\alpha$ ، كما هو موضح في الجدول التالي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**							b_i
	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	e_3	e_4	
y_2	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{10}$	0	40
y_4	0	0	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	300
e_2	2	0	$-\frac{3}{2}$	-1	1	0	0	100
e_4	$\frac{14}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{8}{5}$	1	α
W	-360	0	-540	-10	0	-165	0	$(\alpha - 640)$

حتى إنتاج النوع الرابع يجب أن يخرج e_4 من الأساس حتى يصبح x_4 موجبا، لابد أن تضمن المؤسسة تسويقه بربح لا يقل عن 640 وحدة نقدية، أي يجب أن يكون: $\alpha \geq 640$

مثال (11): بالرجوع للمثال (02) وتفترض أننا نريد دراسة مسألة إنتاج نوع جديد وليكن النوع D، حيث أن هذا النوع يتطلب على التوالي: 1، 3 و 2 وحدة من أنواع المدخلات الثلاثة، فما هو أدنى ربح خاص بهذا النوع الجديد يجعل هذه المؤسسة تنتجه وتسوقه؟

الحل:

بما أن المتغير في البرنامج الأولي يقابله قيد في البرنامج الثنائي فإن المتغير D (الذي نعبر عن الكمية الخاصة به بالمتغير x_4) يقابله القيد التالي: $y_1 + 3y_2 + 2x_3 \geq \alpha$ ، حيث أن α يعبر عن الربح الخاص

بهذا المنتج، يجب أولا إدخال هذا القيد في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي بعد تحويله إلى الشكل (≤) بنفس طريقة إدخال قيد جديد في البرنامج الأولي: $-y_1 - 3y_2 - 2y_3 \leq -\alpha$ ، كما هو موضح في الجدول التالي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	e_3	
y_1	1	0	2	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
y_2	0	1	-1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	2
e_1	0	0	-2	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	4
W	0	0	200	0	55	230	1260

حتى إنتاج النوع D يجب أن يخرج e_4 من الأساس حتى يصبح x_4 موجبا، ولا يتأتى هذا إلا إذا كان:

$$\alpha - 7 \geq 0 \rightarrow \alpha \geq 7$$

وهذا معناه أنه لكي يتم إنتاج هذا النوع الجديد لابد أن نضمن تسويقه بربح لا يقل عن 7 وحدات نقدية.

VII. إخراج متغير أو متغيرات من المسألة

هنا نفترض أننا تحصلنا على الحل الأمثل ونريد معرفة آثار إخراج متغير أو متغيرات من المسألة، فإذا افترضنا أن نوعا معينا من المنتجات قد يصبح غير مطلوب في السوق، وبالتالي يكون من الأفضل التفكير في عدم إنتاجه، فما هو تأثير إخراج هذا المتغير من المسألة على الحل المتحصل عليه؟

1- المتغير المراد إخراجه يكون خارج الأساس في جدول الحل الأمثل: في هذه الحالة نقوم فقط بشطب العمود الخاص به في الجدول.

<u>مثال (12)</u>: بالرجوع إلى المثال (02) نفترض أننا نريد معرفة ما هو تأثير إخراج المتغير x_1 من المسألة على جدول الحل الأمثل.

<u>الحل:</u>

حسب جدول الحل الأمثل فإن المتغير x_1 موجود خارج الأساس، وهذا معناه أن الحل الأمثل لا يتطلب إنتاج هذا النوع من المنتجات، وبالتالي إذا افترضنا أن هذا النوع من الممكن أن يصبح غير مطلوب في السوق وقررنا عدم إنتاجه، فهذا لا يغير أي شيء في الحل المتحصل عليه من قبل.

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	55
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	200
Z	4	0	0	1	2	0	1260

2- المتغير المراد إخراجه يكون داخل الأساس في جدول الحل الأمثل: قد رأينا سابقا من قبل أن كل متغير في البرنامج الأولي يقابله قيد في البرنامج الثنائي وهذا معناه أن:

إخراج متغير من البرنامج الأولي ↔ إخراج قيد من البرنامج الثنائي

نذهب إلى جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي نجد أن المتغير e_i المكمل للمتغير الذي نريد إخراجه x_j موجود خارج أساس جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، نقوم أولا بإدخاله ثم نقوم بشطب السطر الخاص به، ونواصل حتى نتحصل على الحل الأمثل الجديد للبرنامج الثنائي، ومنه نستنتج جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي أو الأصلي.

مثال (13): بالرجوع إلى المثال (02) ونفترض أننا نريد معرفة ما هو تأثير إخراج المتغير x_2 من المسألة على الحل الأمثل.

الحل:

حسب جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي فإن المتغير e_2 موجود خارج الأساس، لإدخاله نختار العمود الثاني كعمود الارتكاز.

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	e_3	
y_1	1	0	2	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
y_2	0	1	-1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	2
e_1	0	0	-2	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	4
W	0	0	2	0	4	1	-1260

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	y_3	
y_1	1	2	0	0	0	-1	5
e_2	0	4	-4	0	1	-2	8
e_1	0	-1	-1	1	0	-1	2
W	0	-220	420	0	0	340	-1700

بعد إدخال e_2 في الأساس سنقوم بشطب السطر الخاص به، وبما أن الحل لم يعد أمثلا نواصل حتى الحصول على الحل النهائي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	e_3	
y_1	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
e_1	0	$\frac{1}{2}$	-1	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
W	0	110	420	0	0	230	-1150

يمثل الجدول السابق جدول الحل الأمثل الجديد للبرنامج الثنائي، ومنه جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي بعد إخراج المتغير x_2 هو كالتالي:

Non-Basic Variables	Non-Basic Variables					b_i
	x_1	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_3	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	110
S_3	1	0	0	0	1	420
Z	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	1150

حسب الجدول السابق وبعد إخراج المتغير x_2 فإن الحل الأمثل أصبح كالتالي:

$$Z = 1150\,, x_1 = 0,\ x_2 = 0,\quad x_3 = 230,\quad S_1 = 110,\ S_2 = 0\ ,\ S_3 = 420$$

VIII. التغير في المعاملات الفنية للقيود a_{ij}

إن التغيرات التي تحدث في معاملات متغيرات القرار تؤثر بشكل مباشر على عناصر مصفوفة الحل، والتي تؤدي إلى التعقيد في الحسابات ويمكن أن تؤثر على الجانب الأيسر لقيود المسألة المقابلة المتعلقة بها (طريقة النموذج المقابل)، ما قد يجعل من الحل الحالي للمشكلة حلا غير ممكن أو غير مثالي، وعليه فإن تحليل الحساسية في هذه الحالة لن يعطي بيانات مباشرة فيما يتعلق بمثالية أو إمكانية حل المشكلة ولذلك يفضل إعادة حل المشكلة على أساس أنها مشكلة جديدة.

IX. تمارين محلولة

التمرين الأول: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Max(Z) = 600x_1 + 800x_2 + 500x_3$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 500 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 400 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 200 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

وقد تم التوصل إلى الجدول التالي:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_1	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{5}$	110
S_2	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	120
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	30
Z	0	0	300	100	0	200	90000

❖ **المطلوب:**

1- هل الحل المتوصل إليه حول الحل الأمثل؟ ولماذا؟ قدم قيم الحل الأمثل للنموذج السابق؟

2- بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار α، حدد مجال تغيره لكي يبقى الحل أمثلا، وفي حال انخفاض هذا الربح بمقدار (420)، هل يبقى الحل أمثلا؟

3- بافتراض أن هذه المؤسسة قررت إضافة مورد جديد يستخدم كما يلي: $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 300$ ، هل يبقى الحل أمثلا في هذه الحالة؟ قدم الحل الأمثل في هذه الحالة.

الحل:

1-نعم الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل لأن كل معاملات دالة الهدف موجبة أو معدومـــة أي $\Sigma Z \geq 0$، حيث أن قيم الحل الأمثل هي:

$$Z = 90000,\quad x_1 = 110,\quad x_2 = 30,\quad x_3 = 0,\quad S_1 = 0,\quad S_2 = 120,\quad S_3 = 0$$

2- أ- بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار α يصبح جدول الحل الأمثل:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_1	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{5}$	110
S_2	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	120
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	30
Z	0	0	$(300+\frac{2}{5}\alpha)$	$(100-\frac{1}{10}\alpha)$	0	$(200+\frac{2}{5}\alpha)$	90000

لكي يبقى الحل أمثلا يجب أن تكون كل معاملات دالة الهدف موجبة أو معدومة أي $\Sigma Z \geq 0$، أي:

$$\left(300+\tfrac{2}{5}\alpha\right) \geq 0,\quad \left(100-\tfrac{1}{10}\alpha\right) \geq 0,\ (200+\tfrac{2}{5}\alpha) \geq 0$$

وعليه:

$$\left(300+\tfrac{2}{5}\alpha\right) \geq 0 \rightarrow \alpha \geq -750$$
$$\left(100-\tfrac{1}{10}\alpha\right) \geq 0 \rightarrow \alpha \leq 1000$$
$$\left(200+\tfrac{2}{5}\alpha\right) \geq 0 \rightarrow \alpha \geq -500$$

أي أن: $\alpha \in [-500, +1000]$

وهذا معناه أن أي زيادة تقل أو تساوي 1000 وحدات نقدية و أي انخفاض يزيد أو يســاوي 500 وحــدات نقدية يبقيان أساس جدول الحل الأمثل بدون تغيير.

2-ب- بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني ينخفض بمقدار (420) يصبح جدول الحل الأمثل:

Basic Variables	Non-Basic Variables						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_1	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{5}$	110
S_2	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	120
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	30
Z	0	0	132	142	0	32	77400

نلاحظ أن الحل الأمثل لم يتغير (ما عدا انخفاض في قيمة دالة الهدف)، إذ تمثلت قيمه فيما يلي:

$$Z = 77400,\quad x_1 = 110,\quad x_2 = 30,\quad x_3 = 0,\quad S_1 = 0,\quad S_2 = 120,\quad S_3 = 0$$

3- بافتراض أن هذه المؤسسة قررت إضافة مورد جديد كما يلي: $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 300$ ، يصبح البرنامج الخطي بالشكل التالي:

$$Max(Z) = 600x_1 + 800x_2 + 500x_3$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 500 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 400 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 300 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

عند تعويض قيم الحل الأمثل المتوصل إليه في الجدول السابق نحصل على ما يلي:

$$4(110) + 2(30) + 4(0) + S_4 = 300 \rightarrow S_4 = -200$$

نضرب قيم السطر الأول في القيمة (-4) فنحصل على ما يلي:

$$new(x_1) = \left[1 \quad 0 \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{10} \quad 0 \quad -\frac{1}{5} \quad 0 \quad 110\right] * (-4) = \left[-4 \quad 0 \quad -\frac{16}{5} \quad -\frac{6}{5} \quad 0 \quad \frac{4}{5} \quad 0 \quad -440\right]$$

نضرب قيم السطر الثالث في القيمة (-2) فنحصل على ما يلي:

$$new(x_2) = \left[0 \quad 1 \quad \frac{2}{5} \quad -\frac{1}{10} \quad 0 \quad \frac{2}{5} \quad 0 \quad 30\right] * (-2) = \left[0 \quad -2 \quad -\frac{4}{5} \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad -\frac{4}{5} \quad 0 \quad -60\right]$$

أما بالنسبة للقيم الجديدة لسطر متغيرة الأساس S_4 يتم الحصول عليها عن طريق جمع قيم الأسطر الجديدة لمتغيرتي القرار الأولى والثانية (السطر الأول والثالث)، مع القيم القديمة للمتغيرة S_4 فنحصل على ما يلي:

$$new(S_4) = \left[-4 \quad 0 \quad -\frac{16}{5} \quad -\frac{6}{5} \quad 0 \quad \frac{4}{5} \quad 0 \quad -440\right] + \left[0 \quad -2 \quad -\frac{4}{5} \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad -\frac{4}{5} \quad 0 \quad -60\right]$$
$$+ [4 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 300] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -200]$$

وبتعويض القيم الجديدة فقط لمتغيرة الأساس S_4 في جدول الحل الأمثل نحصل على ما يلي:

Basic Variables	Non-Basic Variables							b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
x_1	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	110
S_2	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	120
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	30
S_4	0	0	0	-1	0	0	1	$\mathbf{-200}$
Z	0	0	420	100	0	200	0	90000

نلاحظ من خلال الجدول السابق أن معيار الأمثلية غير محقق، مما يتطلب الانتقال إلى جدول حل جديد:

Basic Variables	Non-Basic Variables							b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
x_1	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	50
S_2	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	200
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	50
S_4	0	0	0	-1	0	0	1	200
Z	0	0	300	0	0	0	100	70000

نلاحظ أن شرط الأمثلية قد تحقق، وبالتالي فإن قيم الحل الأمثل الجديد هي:

$$Z = 70000,\ \ x_1 = 50,\ x_2 = 50,\ \ x_3 = 0,\ \ S_1 = 200,\ \ S_2 = 200,$$
$$S_3 = 0,\ \ S_4 = 0$$

التمرين الثاني: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Max(Z) = 20x_1 + 25x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2\,x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 3\,x_1 + x_2 \leq 30 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

وقد تم التوصل إلى جدول الحل الأمثل للبرنامج المقابل للبرنامج السابق كما يلي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**					b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	0	0	1	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
Z	0	0	0	11	3	310

❖ **المطلوب:**

1- نفرض أن دالة الهدف قد تغيرت إلى الشكل التالي: $Max(Z) = 20x_1 + 45x_2$ ، هل يؤثر هذا التغيير على الحل الأمثل؟ ما هو المجال الذي يمكن أن يتغير فيه كل من معامل المتغير الأول والثاني x_1 و x_2 دون أن يؤثر ذلك على الحل السابق؟

2- نفرض أن الموارد المتاحة في القيد الثاني أصبحت 23 وبالتالي القيد الثاني أصبح بالشكل التالي: $x_1 + 2x_2 \leq 23$، هل يؤثر هذا التغيير على الحل الأمثل؟ ما هو المجال الذي يمكن أن يتغير فيه كل من الموارد المتاحة b_1 و b_2 و b_3 دون أن يؤثر ذلك على الحل السابق؟

الحل:

1- تحديد تأثير دالة الهدف الجديدة $Max(Z) = 20x_1 + 45x_2$ على الحل الأمثل، ومجال تغير معامل المتغير الثاني x_2 دون تغيير الحل الأمثل:

1-1- تحديد تأثير دالة الهدف الجديدة $Max(Z) = 20x_1 + 45x_2$ على الحل الأمثل: بعد تغيير معامل المتغير الثاني يصبح جدول الحل كما يلي:

Basic Variables	Non-Basic Variables					b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	0	0	1	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\boxed{\frac{2}{5}}$	8
Z	0	0	0	23	-1	430

نلاحظ أن شرط الأمثلية لم يتحقق بعد لأن ليس كل قيم السطر Z موجبة أو معدومة أي $(\Sigma Z \geq 0)$، وبالتالي يجب الانتقال إلى جدول حل جديد كما يلي:

Basic Variables	Non-Basic Variables					b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	10
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	10
S_3	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	20
Z	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{45}{2}$	0	450

نلاحظ أن شرط الأمثلية قد تحقق لأن كل قيم السطر Z أصبحت موجبة أو معدومة أي $(\Sigma Z \geq 0)$، وبالتالي قيم الحل الأمثل الجديدة هي:

$$Z = 450,\quad x_1 = 0,\quad x_2 = 10,\quad S_1 = 10,\quad S_2 = 0,\quad S_3 = 20$$

ومنه نستنتج أن دالة الهدف الجديدة قد أثرت على الحل الأمثل، وهو ما أدى إلى حل أمثل جديد المذكور أعلاه.

2-1- تحديد مجال تغير معامل المتغير الأول x_1 دون تغيير الحل الأمثل: لتحديد مجال تغير معامل المتغير الأول x_1 والذي نرمز له بـ α دون تغيير الحل الأمثل، يتم إدخال دالة الهدف $Max(Z) = (20 + \alpha)x_1 + 25x_2$ في الجدول الأمثل بنفس الطريقة التي استعملت في حل المثال ومنه يصبح الجدول بالشكل التالي:

Basic Variables	Non-Basic Variables					b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	0	0	1	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
Z	0	0	0	$(11-\frac{1}{5}\alpha)$	$(8+\frac{2}{5}\alpha)$	$(310+8\alpha)$

حتى لا يتغير أساس جدول الحل الأمثل يجب أن لا يكون هناك أي عنصر سالب أو معدوم في السطر **Z** كما يلي:

$$\left(11-\frac{1}{5}\alpha\right)\geq 0,\quad \left(8+\frac{2}{5}\alpha\right)\geq 0$$

أي أن:

$$\alpha \in [-7.5, +55]$$

وهذا معناه أن أي زيادة تقل أو تساوي 55 وحدة نقدية و أي انخفاض يزيد أو يساوي 7,5 وحدات نقدية في معامل المتغير الأول x_1 يبقيان أساس جدول الحل الأمثل بدون تغيير.

3-1- تحديد مجال تغير معامل المتغير الثاني x_2 دون تغيير الحل الأمثل: لتحديد مجال تغير معامل المتغير الثاني x_2 والذي نرمز له بـ α دون تغيير الحل الأمثل، يتم إدخال دالة الهدف $Max(Z) = 20x_1 + (25+\alpha)x_2$ في الجدول الأمثل بنفس الطريقة التي استعملت في حل المثال ومنه يصبح الجدول بالشكل التالي:

Basic Variables	Non-Basic Variables					b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	0	0	1	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
Z	0	0	0	$(\frac{3}{5}\alpha+11)$	$(3-\frac{1}{5}\alpha)$	$(310+6\alpha)$

حتى لا يتغير أساس جدول الحل الأمثل يجب أن لا يكون هناك أي عنصر سالب أو معدوم في السطر Z كما يلي:

$$\left(\frac{3}{5}\alpha+11\right)\geq 0,\quad \left(3-\frac{1}{5}\alpha\right)\geq 0$$

أي أن:

$$\alpha \in [-18.33, +15]$$

وهذا معناه أن أي زيادة تقل أو تساوي 15 وحدة نقدية و أي انخفاض يزيد أو يساوي 18,33 وحدة نقدية في معامل المتغير الثاني x_2 يبقيان أساس جدول الحل الأمثل بدون تغيير.

2- تحديد تأثير القيد الثاني الجديد $x_1 + 2x_2 \leq 23$ على الحل الأمثل، ومجال تغير كل من الموارد المتاحة b_1 و b_2 و b_3 دون تغيير الحل الأمثل:

2-1- تحديد تأثير القيد الثاني الجديد $x_1 + 2x_2 \leq 23$ على الحل الأمثل: نلاحظ أن الموارد المتاحة في القيد الثاني b_2 قد ارتفعت بـ 3، وبعد إدخال هذا التغيير في جدول الحل الأمثل يصبح هذا الأخير بالشكل التالي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**					b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	0	0	1	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{39}{5}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{37}{5}$
Z	0	0	0	11	3	343

نلاحظ من خلال جدول الحل الأمثل السابق أن قيمة دالة الهدف Z ارتفعت من 310 إلى 343 وحدة نقدية.

2-2- تحديد مجال تغير كل من الموارد المتاحة b_1 و b_2 و b_3 دون تغيير الحل الأمثل:

أ- تحديد مجال تغير الموارد المتاحة b_1 : لتحديد مجال تغير الموارد المتاحة b_1 ولتكن α_1 فإن متغير الفجوة التابع للقيد الأول ضمن مزيج الحل الأساسي (داخل في الحل) في جدول الحل الأمثل، فإن هذا يشير إلى وجود كمية إضافية من هذا المورد ويعني ذلك أن الحد الأعلى لمدى الإمكانية الخاص بهذا المورد (غير محدد) والحد الأدنى يساوي الكمية الأصلية للمورد مطروحا منه قيمة متغير الفجوة التابع للقيد في الجدول الأمثل، نلاحظ أن متغير الفجوة التابع للمورد الأول S_1 هو متغير أساسي وقيمته 6، ومنه: $\alpha_1 \in [-6, +\alpha]$

ب-تحديد مجال تغير الموارد المتاحة b_2 : لتحديد مجال تغير المتاحة b_2 ولتكن α_2 نقوم بما يلي:

$\Delta_1 . b_2 = 6 / (-7/5) = -30/7$

$\Delta_2 . b_2 = 6 / (3/5) = 10$

$\Delta_3 . b_2 = 8 / (-1/5) = -40$

ومنه: $\alpha_2 \in [-10, +4.28]$

ج- تحديد مجال تغير الموارد المتاحة b_3 : لتحديد مجال تغير المتاحة b_3 ولتكن α_3 نقوم بما يلي:

$\Delta_1 .\ b_3 = 6 \ / \ (-1/5) = -30$

$\Delta_2 .\ b_3 = 6 \ / \ (-1/5) = -30$

$\Delta_3 .\ b_3 = 8 \ / \ (2/5) = 20$

ومنه: $\alpha_3 \in [-20, +30]$

X. تمارين غير محلولة

التمرين الأول: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Max(Z) = 10x_1 + 12x_2 + 6x_3$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 80 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 59 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 120 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

❖ **المطلوب:**

1- أوجد الحل الأمثل للبرنامج المقابل.

2- ما هو المجال الذي يمكن أن يتغير فيه معامل المتغير الثالث x_3 دون أن يؤثر ذلك على الحل الأمثل؟

3- نفرض أننا أضفنا متغير جديد للبرنامج الأصلي هو x_4 ، بحيث معاملات هذا المتغير في القيود الثلاثة هي على التوالي: 2، 2، 2، أما معامله في دالة الهدف هو 12، ما هي القيم الجديدة لعمود المتغير الجديدة في جدول الحل الأمثل؟

4- إذا فرضنا أن هناك قيد جديد يضاف إلى البرنامج الأصلي بالشكل التالي: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$ ، ما هو تأثير هذا القيد الجديد على الحل الأمثل السابق؟

التمرين الثاني: إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Max(Z) = 30x_1 + 50x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

❖ **المطلوب:**

1- أوجد الحل الأمثل للبرنامج السابق.

2- نفرض أن دالة الهدف أصبحت بالشكل التالي: $Max(Z) = 35x_1 + 55x_2$، استخرج جدول الحل الأمثل للبرنامج الجديد.

3- ما هو المجال الذي يمكن أن يتغير فيه كل من معامل المتغير الأول والثاني x_1 و x_2 دون أن يؤثر ذلك على الحل السابق؟

4- نفرض أن الموارد المتاحة b_i للقيود الثلاثة قد تغيرت إلى 20، 11، 15 على التوالي، ما هو تأثير ذلك على الحل الأمثل السابق؟

5- ما هو المجال الذي يمكن أن يتغير فيه كل الموارد المتاحة b_i دون أن يؤثر ذلك على الحل السابق؟

6- نفرض أننا أضفنا متغير جديد للبرنامج الأصلي هو x_4 ، بحيث معاملات هذا المتغير في القيود الثلاثة هي على التوالي: 4، 2، 3، أما معامله في دالة الهدف هو 40، ما هي القيم الجديدة لعمود المتغير الجديدة في جدول الحل الأمثل؟

7- إذا فرضنا أن هناك قيد جديد يضاف إلى البرنامج الأصلي سيكون بالشكل التالي: $x_1 + 4x_2 \leq 13$ ، ما هو تأثير هذا القيد الجديد على الحل الأمثل السابق؟

<u>التمرين الثالث:</u> إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Max(Z) = 4x_1 + 5x_2 + 5x_3$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 460 \\ x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 420 \\ (x_1 . x_2 . x_3) \geq 0 \end{cases}$$

وأن جدول الحل الأمثل هو بالشكل التالي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	1650

❖ **المطلوب:**

1- نفرض أن المورد الثالث b_3 قد انخفض من 420 إلى 400، ما هو تأثير ذلك على الحل الأمثل؟

2- إذا أضفنا قيد جديد إلى البرنامج الأصلي كالتالي: $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 600$، ما هو تأثير ذلك على الحل الأمثل؟

التمرين الرابع: قام مدير العمليات في مؤسسة لصناعة البرمجيات ببناء نموذج البرمجة الخطية الذي يهدف إلى مساعدة المؤسسة في تخفيض تكاليف إنتاج نوعين من البرمجيات كما يلي:

$$Min(Z) = 5x_1 + 6x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 \leq 300 \\ x_2 \leq 150 \\ (x_1 . x_2) \geq 0 \end{cases}$$

وأن جدول الحل الأمثل هو بالشكل التالي:

Basic Variables	**Non-Basic Variables**						b_i
	x_1	x_2	S_1	S_2	A_2	A_3	
S_1	0	0	−1	1	1	−1	550
x_1	1	0	1	0	0	0	300
x_2	0	1	−1	0	1	0	700
Z	0	0	−1	0	(6 – M)	−M	5700

❖ **المطلوب:**

1- ما هو المجال الذي يمكن أن يتغير فيه كل من معامل المتغير الأول والثاني x_1 و x_2 دون أن يؤثر ذلك على الحل السابق؟

2- ما هو المجال الذي يمكن أن يتغير فيه كل الموارد المتاحة b_i دون أن يؤثر ذلك على الحل السابق؟

المحور السادس: مسائل النقل
Transportation Problem

تعتبر مشكلة النقل أحد الأساليب الرياضية التي تساعد في اتخاذ القرار المناسب لنقل كمية من المواد والسلع من مصادر أو مراكز الإنتاج أو من المخازن إلى مراكز الطلب أو الاستهلاك لسد حاجات هذه المواقع وبأقل تكلفة ممكنة، وتظهر مشكلة النقل في الحياة العملية بصورة متكررة، فكثيرا ما يرى المرء شاحنات لنقل البضائع تسير عبر طرق مختلفة من مواقع عددية لإيصال هذه المادة الحيوية إلى المستهلك الذي يمكن أن يوجد في أماكن متعددة.

I. مفهوم مشكلة النقل

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة حيث أن النماذج الرياضية المستخدمة في مشكلة النقل هي نماذج خطية والهدف من إستخدامها هو إيجاد أسلوب امثل لتوزيع الوحدات أو المنتوجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ، مراكز تسويقية) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل كلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت، ومشاكل النقل يمكن حلها باستخدام طريقة السمبلكس في البرمجة الخطية إلا أن هذه الطريقة تتطلب خطوات وجداول وعمليات حسابية كثيرة وهذا الأمر تم التغلب عليه من خلال تفريغ كافة مفردات (متغيرات) مشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل وهذه المفردات.

وتعود الجذور التاريخية لمشكلة النقل Transportation Problem إلى سنة 1941، وقد نشر T.C.Kopmans في سنة 1947 دراسة تحت عنوان " الاستثمار الأمثل لنظام النقل "، حيث تعتبر مشاكل النقل من أهم المواضيع التي يعتمد عليها بشكل واسع في حل الكثير من المشاكل الاقتصادية في الفترة الأخيرة، وذلك لسهولة استخدامها في تنظيم الإنتاج وموارده، وفي تموين الإمداد لأهم المواد الزراعية والصناعية، من أجل الحصول على أفضل الخطط لنقل الشحنات والموارد الاقتصادية وتنظيمها بشكل مثالي.

II. صياغة مشكلة النقل

يمكن تلخيص المفهوم العام لمشاكل النقل بما يلي:

- وجود عدد m من مراكز العرض أو المصدرين الذين يعرضون بضائع متشابهة a_i، $i=1,..m$، وعدد من مراكز الطلب (الاستهلاك) مقدارها n، حجم طلب كل منهم معلوم ويقدر بـ b_j ، $j=1,..n$.

- تكلفة الوحدة الواحدة من السلعة من مركز الإنتاج i إلى مركز الطلب (الاستهلاك) j معلومة ومحددة وهي C_{ij}.
- أن الكميات المنقولة من المراكز الإنتاجية إلى المراكز التسويقية محددة وهي X_{ij}.
- تخفيض التكاليف الكلية إلى أقل ما يمكن.

ولغرض تسهيل دراسة مشكلة النقل يمكن تمثيل جدول التكاليف للوحدات من المراكز الإنتاجية إلى المراكز التسويقية كما يلي:

مراكز العرض	مراكز الطلب					العرض Supply
	1	2	3	...	N	
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	... ...	C_{1n} X_{1n}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	... ...	C_{2n} X_{2n}	a_2
3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	... ...	C_{3n} X_{3n}	a_3
:	:	:	:	:	:	:
M	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	...	C_{mn}	b_m
الطلب Demand	b_1	b_2	b_3	...	b_n	$\sum a_i = b_j$

كما يشترط نموذج النقل بشكله الأولي ضرورة المساواة بين عدد الوحدات في المراكز الإنتاجية وعدد الوحدات المطلوبة في المراكز التسويقية (مراكز الطلب)، ليكون جدول النقل في حالة توازن، أي أن مجموع العرض= مجموع الطلب)، أما إذا لم تتحقق المساواة يتم إضافة سطر أو عمود وهمي ليستوعب الفارق بين كمية العرض والطلب وتكون تكاليف النقل فيها صفر.

أما النموذج الرياضي لمشكلة النقل فيمكن كتابته بالشكل التالي:

$$MIN(z) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \cdot C_{ij}$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \, , i = 1,..,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, j = 1,..,n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

III. إيجاد الحل الأولي (الإبتدائي) لمشكلة النقل

لغرض إيجاد الحل الأولي لمشكلة النقل هناك ثلاث طرق رئيسية:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية North-West Corner.
- طريقة التكلفة الدنيا Least-Cost.
- طريقة فوجل التقريبية (الجزاء) Vogel's Approximation (Penalty Method).

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية North-West Corner Method: يقصد بالزاوية الشمالية الغربية أو خانة في الجدول إلى الأعلى وإلى اليسار، وهي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي، وتعتبر هذه الطريقة من أسهل وأبسط الطرق وأكثرها شيوعا، حيث لا يستخدم فيها أي منطق علمي لتوزيع الكميات المتوفرة من المراكز الانتاجية إلى مراكز الطلب، بالمقابل فإنها تهمل عنصر التكاليف عند التوزيع، وتتطلب جداول كثيرة للوصول إلى الحل الأمثل.

يتم الحل وفقا لهذه الطريقة بعد التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن كما يلي:

- نبدأ بالخلية العليا اليسرى (الزاوية الشمالية الغربية) لجدول النقل، ثم نخصص أكبر عدد من الوحدات لتلك الخلية، ويكون هذا العدد المخصص الأقل في سطر الكمية المعروضة المتوفرة أو الأقل في عمود متطلبات الطلب.
- ننقص كمية العرض في السطر، وكمية الطلب في العمود بنفس كمية الوحدات التي خصصت للخلية.
- إذا أصبح العرض في السطر مساويا الآن للصفر، نتحرك إلى الأسفل في العمود إلى الخلية الثالية، أما إذا أصبح كل من العرض في السطر والطلب في العمود مساويين للصفر، نتحرك إلى الأسفل خلية واحدة ثم إلى اليمين خلية أخرى.
- نخصص للخلية التالية والمحددة في الخطوة الثالثة، أكبر عدد ممكن الوحدات، ثم نعود حتى نصل إلى حل أولي مقبول.

مثال (01): تنتج شركة ثلاثة أنواع من السلع الكهربائية، وتقوم بتجهيز ثلاثة مراكز تسويقية (الطلب)، و يوضح الجدول التالي تكاليف نقل الوحدة الواحدة وكذا الكميات المعروضة والمطلوبة، والمطلوب هو إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	1	2	3	
1	7	3	10	22
2	4	6	0	24
3	5	8	9	14
الطلب	18	22	20	60

الحل:

بعد التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة (في هذا المثال متساوية وتساوي 60) نتبع الخطوات التالية:

- نبدأ بالطلب الأول وقيمته 18 وحدة والعرض الأول وقيمته 22 وحدة، وبالتالي العرض الأول يغطي الطلب الأولى وبتكلفة نقل 7 دج، مع بقاء 3 وحدات من العرض الأول.
- ننتقل للطلب الثاني وقيمته 22 وحدة يتم تلبيتها 4 وحدات من العرض الأول المتبقي وبتكلفة نقل3 دج، أما 18 وحدة الأخرى تلبى بالعرض الثاني المقدر بـ 24 وحدة بتكلفة نقل 6 دج، مع بقاء 6 وحدات من العرض الثاني بعد تلبية الطلبين الأول والثاني.
- ثم ننتقل للطلب الثالث وقيمته 20 وحدة التي يتم تلبيته بـ 6 وحدات المتبقية من العرض الثاني بتكلفة نقل 0 دج، وإكمالها بالعرض الثالث 16 وحدة بتكلفة نقل 97 دج.

ويمكن تمثيل الخطوات السابقة في جدول الحل الأولي بحيث أن ما داخل المربعات الصغيرة هي تكاليف النقل والأخرى الكميات:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	1	2	3	
1	7 18	3 4	10	22
2	4	6 18	0 6	24
3	5	8	9 14	14
الطلب	18	22	20	60

ومنه الحل الأساسي حسب الجدول السابق: $x_{11}=18$, $x_{12}=4$, $x_{22}=18$, $x_{23}=6$, $x_{33}=14$، أما باقي المتغيرات فهي غير أساسية وتساوي الصفر.

ثم نحسب قيمة التكاليف الكلية من دالة الهدف بضرب الكميات في تكلفة الوحدة الواحدة للنقل، ومنه تكون تكلفة النقل الأولية وفقا لهذه الطريقة:

$$MIN(Z)=(7.18)+(3.4)+(6.18)+(0.6)+(9.14)=372$$

2- طريقة التكلفة الدنيا Least-Cost Method: تعتبر طريقة التكلفة الدنيا بدون شك أفضل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية، وحسب هذه الطريقة يتم اختيار التوزيع على أساس التكلفة الأقل، حيث يتم مشاهدة جدول التكاليف وإيجاد أقل تكلفة، ثم تخصيص الكمية المطلوبة في النهاية إزاء الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة، وبعد أن يتم تخصيص الاحتياجات المطلوبة أو نفاذ المتيسرات، نقوم بملاحظة أقل تكلفة أخرى في جدول التكاليف المتبقية، ويتم التوزيع بالطريقة نفسها، وهكذا نستمر إلى أن يتم توزيع كافة الوحدات المعروضة.

مثال (02): أوجد الحل الأولي بطريقة التكلفة الدنيا لمسألة النقل في المثال السابق.

الحل:

بعد التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة (في هذا المثال متساوية وتساوي 60) نتبع الخطوات التالية:

- أقل تكلفة هي 0 دج التي تقابل تقاطع الطلب الأول 20 وحدة والعرض الثاني 24 وحدة، حيث هذا الأخير يغطي الطلب مع بقاء 4 وحدات.
- ثم ننتقل للتكلفة الثانية الأقل وهي 3 دج التي تقابل الطلب الثاني 22 وحدة والعرض الأول 22 وحدة، وهذا الأخير يغطي الطلب مع عدم بقاء أي وحدة.
- ثم ننتقل للتكلفة الثالثة الأقل وهي 4 دج التي تقابل الطلب الأول 18 وحدة مع العرض الثاني 24 وحدة، والمتبقي منه 4 وحدات فقط، توجه لتلبية هذا الطلب مع وجود عجز بـ 14 وحدة.
- ثم ننتقل للتكلفة الرابعة الأقل وهي 5 دج التي تقابل الطلب الأول 18 وحدة (14 متبقية فقط) مع العرض الثالث 14 وحدة، هذا الأخير يلبي الجزء المتبقي من الطلب الأول مع عدم بقاء أي وحدة، لنحصل في الأخير على الخطة المعتمدة لإيجاد الحل، ويمكن تلخيص الحل السابق في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	1	2	3	
1	7	3 22	10	22
2	4 4	6	0 20	24
3	5 14	8	9	14
الطلب	18	22	20	60

ومنه الحل الأساسي حسب الجدول السابق: $x_{31}=14$,$x_{23}=20$, $x_{21}=4$, $x_{12}=22$، أما بـــاقي المتغيـــرات فهي غير أساسية وتساوي الصفر، أما التكاليف الكلية فتساوي:

$$MIN(Z)=(3.22)+(4.4)+(0.20)+(5.14)=152$$

3. طريقة فوجل التقريبية (الجزاء) Vogel's Approximation Method: تعتبر طريقة فوجل من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة للوصول الى الحل الامثل، ونادرا ما تكون طرقتي التكلفة الدنيا والزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، ونقصد بالأفضلية في هذا المجال للوصول إلى الحل بأسرع وقت ممكن، ولكن طريقة فوجل تحتاج الى عمليات حسابية أطول مما تحتاج إليه الطريقتين السابقتين، وعموما تتلخص خطوات إيجاد الحل الأولي وفقا لهذه الطريقة بعد التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن فيما يلي:

- نحسب تكاليف الجزاء لكل سطر وعمود لجدول النقل، والتي تساوي حاصل الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر أو عمود.
- نحدد السطر أو العمود الذي يحتوي على أكبر تكلفة جزاء، ونخصص أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة في السطر أو العمود الذي تم اختياره.
- ننقص العرض في السطر والطلب في العمود بنفس عدد الوحدات المخصصة للخلية.
- إذا أصبح العرض في السطر يساوي الصفر نلغي السطر، وإذا أصبح الطلب في العمود يساوي الصفر نلغي العمود، أما إذا أصبح كل من العرض في السطر والطلب في العمود يساويان الصفر نلغي السطر والعمود معا.
- نكرر الخطوات السابقة ونستمر إلى أن يتم توزيع جميع الوحدات المعروضة على الوحدات المطلوبة.

مثال (03): أوجد الحل الأولي بطريقة فوجل التقريبية لمسألة النقل في المثال السابق.

الحل:

بعد التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة (في هذا المثال متساوية وتساوي 60) نتبع الخطوات التالية:

- إن أكبر تكلفة جزاء موجودة في العمود الثالث(الطلب الثالث)، وفي هذا العمود أصغر تكلفة هي الصفر أي تقاطع الطلب الثالث (20 وحدة) مع العرض الثاني (24 وحدة)، يتم تغطية الطلب بالعرض مع بقاء فائض بقيمة 4 وحدات.
- ثاني أكبر تكلفة جزاء موجودة في السطر الأول (العرض الأول)، أقل تكلفة في هذا السطر هي 3، التي تمثل تقاطع الطلب الثاني (22 وحدة) بالعرض الأول (22 وحدة)، يتم تغطية الطلب بالعرض مع عدم بقاء أي فائض.
- ثالث أكبر تكلفة جزاء موجودة في العمود الثاني (العرض الثاني)، أقل تكلفة وهي الصفر التي تم استغلالها لتلبية الطلب الثالث، لذلك نستخدم التكلفة الأصغر الموالية وهي 4 دج، والتي تمثل تقاطع الطلب الأول (18 وحدة) مع العرض الثاني (المتبقي منه 4 وحدات فقط)، يتم تغطية الطلب بالعرض مع بقاء نقص بـ 14 وحدة.
- رابع أكبر تكلفة جزاء موجودة في السطر الثالث (العرض الثالث)، وأقل تكلفة وهي 5 دج، وتمثل تقاطع العرض الثالث (14 وحدة) مع الطلب الأول (المتبقي منه 14 وحدة فقط) لنحصل في الأخير على الخطة المعتمدة لإيجاد الحل، ويمكن تلخيص الحل السابق في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب 1	2	3	العرض	الفرق		
1	7	3 22	10	22	4	4	
2	4 4	6	0 20	24	4	2	4
3	5 14	8	9	14	3	3	5
الطلب	18	22	20	60			
الفرق	1	3	9				
	1	3					
	1						

ومنه الحل الأساسي حسب الجدول السابق: $x_{12}=22, x_{21}=4, x_{23}=20, x_{31}=14$، أما باقي المتغيرات فهي غير أساسية وتساوي الصفر، أما التكاليف الكلية فتساوي:

$$MIN(Z)=(3.22)+(4.4)+(0.20)+(5.14)=152$$

IV. إيجاد الحل الأمثل لمشكلة النقل

إن الحل المتوصل إليه في الطرق الثلاثة السابقة هو حل أولي، لكننا لا نعلم إذا كان حلا أمثلا أم هو غير أمثل، ولمعرفة ذلك هناك طريقتين مستخدمتين هما:

- طريقة المسار الحرج Step-Stone Method.
- طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method.

1- طريقة المسار الحرج Step-Stone Method: تتطلب هذه الطريقة تقييم كل خلية غير مشغولة في جدول الحل الأولي، لمعرفة ماذا سيحدث لتكاليف النقل الكلية، إذا نقلت وحدة واحدة إلى أحد الخلايا غير المشغولة، فإذا وجدنا أن ملء خلية معينة غير مشغولة سيؤدي إلى تقليل التكاليف، يتم تعديل الحل الراهن وتستمر عملية تقييم كل جدول إلى أن نتوصل إلى أن إشغال أي خلية غير مشغولة لا يؤدي إلى تقليل تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها، كما يجب ملاحظة أن أي مشكلة للنقل تكون قابلة للحل الأمثل دون أي إجراءات إضافية إذا تحقق الشرط التالي، وهو أن عدد الخلايا المشغولة يجب أن تساوي دائما عدد الأسطر وعدد الأعمدة ناقص واحد أي: عدد الخلايا المشغولة = عدد الأسطر + عدد الأعمدة − 1 = m + n − 1

للوصول إلى الحل وفقا لهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- يتم رسم مسار مغلق Closed Path لكل خلية غير مشغولة، ويتكون المسار من مجموعة قطع من المستقيمات المتعاقبة الأفقية والعمودية، يبدأ من الخلية غير المشغولة المراد اختيارها إلى خلية مليئة أخرى حتى يتم الوصول إلى الخلية غير المشغولة نفسها، حيث يمكن تجاوز خلايا غير مشغولة أو ممتلئة بحيث تصل إلى خلية ممتلئة.

- يبدأ المسار المغلق بعلامة موجبة (+) للخلية المراد تقييمها تعقبها علامة سالبة (-) للخلية التي تليها في المسار، ثم علامة موجبة للخلية التي تليها، وهكذا لجميع الخلايا التي يتشكل منها المسار.

- تحسب التكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية) وذلك بجمع التكلفة للخلايا الواقعة على المسار، فإذا كانت هذه القيمة سالبة معنى ذلك أن إشغال هذه الخلية سيساهم في تخفيض التكاليف، ونرمز لتكلفة المسار ب δ_{ij}.

- تكرر الخطوات السابقة في حالة وجود أكثر من خلية غير مشغولة، فإذا كانت التكاليف غير المباشرة موجبة أو معدومة، فقد توصلنا إلى الحل الأمثل، أما إذا كانت هناك خلية غير مشغولة أو أكثر تكون التكلفة غير المباشرة لها سالبة، فهذا يعني أن هناك إمكانية لتحسين الحل وتخفيض التكاليف، وتعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة للتكلفة غير المباشرة، لأنها تساهم في تخفيض التكاليف وتؤدي إلى تحسين الحل.

- يتم إشغال الخلية غير المشغولة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار.

- تكرر الخطوات السابقة بنقل القيم بين الخلايا واختبار الخلايا غير المشغولة بنفس الطريقة حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل.

- في حالة عدم تحقق شرط عدد الخلايا المشغولة = $(m + n - 1)$، نضيف إلى أحد الخلايا غير المشغولة والتي تحتوي على أقل تكلفة قيمة صفر، بحيث لا تؤثر على الحل وتساعد في اختار الخلايا غير المشغولة.

مثال (04): باستخدام جدول الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال السابق، أوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل باستخدام طريقة المسار الحرج.

الحل:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	1	2	3	
1	7 -18	3 +4	10	22
2	4	6 -18	0 +6	24
3	5 +	8	9 14	14
الطلب	18	22	20	60

للقيام بالحل نتبع الخطوات التالية:

- يتم التأكد من أن الحل الأولي قابل للحل الأمثل، إذ نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة يساوي 5، وأن الشرط عدد الخلايا المشغولة = $(1 - 3 + 3)$ محقق.
- يتم رسم مسار مغلق للخلايا غير المشغولة.
- يتم حساب التكاليف غير المباشرة للمسارات المغلقة للخلايا غير المشغولة كما يلي:

- المسار الأول: ويخص الخلية غير المشغولة X_{13}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{13}$، ونحسب: $\delta_{13} = 10 - 0 + 6 - 3 = 13 > 0$

- المسار الثاني: ويخص الخلية غير المشغولة X_{21}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{21}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{21}$، ونحسب: $\delta_{21} = 4 - 7 + 3 - 6 = -6 < 0$

- المسار الثالث: ويخص الخلية غير المشغولة X_{31}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{31}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{33}\rightarrow X_{31}$، ونحسب: $\delta_{31} = 5 - 7 + 3 - 6 + 0 - 9 = -14 < 0$

- المسار الرابع: ويخص الخلية غير المشغولة X_{32}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{32}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{33}\rightarrow X_{32}$، ونحسب: $\delta_{32} = 8 - 6 + 0 - 9 = -7 < 0$

- من التكاليف غير المباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X_{31} لها أكبر قيمة سالبة، ولذلك يتم اختيارها لأنها تؤدي إلى تخفيض التكاليف، ويتم إشغالها بنقل كميات إليها، حيث تحدد الكمية التي ستنقل إليها من خلايا المسار المغلق على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة.
- إن عدد الوحدات الواجب نقلها إلى الخلية X_{31} تتحدد من المسار المغلق لها، إن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة هي (14) وحدة، يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة، وبذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق وتصبح كالتالي:

$$X_{31} = 14\ ,\ X_{11} = 18 - 14 = 4, X_{13} = 4 + 14 = 18, X_{22} = 18 - 14 = 4$$
$$X_{23} = 6 + 14 = 20, X_{33} = 14 - 14 = 0$$

لنحصل بعدها على الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	1	2	3	
1	7 -4	3 +18	10	22
2	4 +	6 4	0 20	24
3	5 14	8	9	14
الطلب	18	22	20	60

أما التكاليف الكلية فتساوي:

$$MIN(Z)=(7.4)+(3.18)+(6.4)+(0.20)+(5.14)+(9.0) = 176$$

لمعرفة هل الحل المحقق في الجدول السابق يمثل الحل الأمثل أم لا، يجب اختبار أمثلية الجدول من خلال نفس القواعد السابقة والتي تتمثل في دراسة أثر إشغال الخلايا غير المشغولة التكلفة الكلية كما يلي:

- المسار الأول: ويخص الخلية غير المشغولة X_{13}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{13}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{13}$، ونحسب: $\delta_{13} = 10 - 0 + 6 - 3 = 13 > 0$

- المسار الثاني: ويخص الخلية غير المشغولة X_{21}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{21}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{21}$، ونحسب: $\delta_{21} = 4 - 7 + 3 - 6 = -6 < 0$

- المسار الثالث: ويخص الخلية غير المشغولة X_{32}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{32}\rightarrow X_{31}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{32}$، ونحسب: $\delta_{32} = 8 - 5 + 7 - 3 = 7 > 0$

- المسار الرابع: ويخص الخلية غير المشغولة X_{33}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{33}\rightarrow X_{31}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{33}$،ونحسب: $\delta_{33} = 9 - 5 + 7 - 3 + 6 - 0 = 14 > 0$

من التكاليف غير المباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X_{21} لها قيمة سالبة، ولذلك يتم اختيارها لأنها تؤدي إلى تخفيض التكاليف، ويتم إشغالها بنقل كميات إليها، حيث تحدد الكمية التي ستنقل إليها من خلايا المسار المغلق على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة.

- إن عدد الوحدات الواجب نقلها إلى الخلية X_{21} تتحدد من المسار المغلق لها، إن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة هي (4) وحدات، يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة، وبذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق وتصبح كالتالي:

$X_{11} = 4\ , X_{12} = 18 + 14 = 22,\ \ X_{21} = 4, X_{22} = 4 - 4 = 0$

لنحصل بعدها على الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	1	2	3	
1	7	3 22	10	22
2	4 4	6	0 20	24
3	5 14	8	9	14
الطلب	18	22	20	60

أما التكاليف الكلية فتساوي:

$$MIN(Z)=(3.22)+(4.4)+ 0.20)+(5.14 = 152$$

إن الحل المتحصل عليه في الجدول السابق لا يمثل الحل الأمثل لأنه لا يحقق شرط عدد الخلايا المشغولة $= (m + n - 1)$، إذ أن عدد الخلايا المشغولة أصبح 4، لذلك يتم إضافة صفر إلى أحد الخلايا غير المشغولة والتي لها أقل تكلفة وهي الخلية X_{22} ذات التكلفة 6، للمساعدة في اختبار الخلايا غير المشغولة كما يلي:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	1	2	3	
1	7	3 22	10	22
2	4 4	6 0	0 20	24
3	5 14	8	9	14
الطلب	18	22	20	60

ثم يتم اختبار أمثلية الجدول الأخير بنفس القواعد السابقة التي تتمثل في دراسة أثر إشغال الخلايا غير المشغولة على التكلفة الكلية كمايلي:

- المسار الأول: ويخص الخلية غير المشغولة X_{11}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{21}\rightarrow X_{11}$، ونحسب: $\delta_{11} = 7 - 3 + 6 - 4 = 6 > 0$

- المسار الثاني: ويخص الخلية غير المشغولة X_{13}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{13}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{21}\rightarrow X_{13}$، ونحسب: $\delta_{21} = 10 - 0 + 6 - 3 = 13 > 0$

- المسار الثالث: ويخص الخلية غير المشغولة X_{32}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{32}\rightarrow X_{31}\rightarrow X_{21}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{32}$، ونحسب: $\delta_{32} = 8 - 5 + 4 - 6 = 1 > 0$

- المسار الرابع: ويخص الخلية غير المشغولة X_{33}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{33}\rightarrow X_{31}\rightarrow X_{21}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{33}$، ونحسب: $\delta_{33} = 9 - 5 + 4 - 0 = 8 > 0$

إن التكلفة غير المباشرة للخلايا غير المشغولة هي أرقام موجبة، لذلك فإن إشغال أي من هذه الخلايا سوف لن يخفض من التكاليف، وبذلك يكون الحل للجدول الأخير هو الحل الأمثل، وإن قيمة التكاليف الكلية هي 152.

ملاحظة: من ملاحظة الجدول الأخير لطريقة المسار الحرج، نستنتج أنه هو نفس الجدول المتحصل عليه عند استخدام طريقتي التكلفة الدنية وفوجل، مما يدل على أن هاتين الطريقتين تعطيان في أغلب الأحيان الحل الأمثل لمشكلة النقل.

2- طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method: تعتبر أسرع وأسهل من طريقة المسار الحرج، إذ لا تتطلب رسم جيمع المسارات المنعرجة، مما يقلل من الجهد والوقت، كذلك تعتبر هذه الطريقة أكفأ ولها تطبيقات واسعة في حالة استخدام الحاسبة الإلكترونية، ولإيجاد الحل الأمثل وفق هذه الطريقة يتم

اتباع الخطوات التالية:

- التأكد من أن عدد الخلايا المشغولة = عدد الأسطر + عدد الأعمدة − 1 = m + n − 1.
- يتم تكوين معادلة لكل خلية مشغولة في جدول الحل الأولي على أساس المعادلة التالية: $C_{ij} = U_i + V_j$

حيث أن: C_{ij}: المتغير الخاص بالسطر i والذي تقع فيه الخلية المعنية.

U_i: المتغير الخاص بالعمود j والذي تقع فيه الخلية المعنية.

V_j: تكلفة الخلية التي تقع في السطر i والعمود j.

- إيجاد الحل للمعادلات للخلايا المشغولة وحسب الصيغة المذكورة في الخطوة الثانية.
- حساب التكلفة غير المباشرة للخلايا غير المشغولة وفقا للمعادلة التالية:

$$\delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j) \quad \text{التكلفة غير المباشرة للخلية}$$

فإذا كانت هناك خلية أو أكثر من خلية غير مشغولة تكون التكلفة غير المباشرة لها سالبة، فهذا يعني أن هناك إمكانية لتحسين الحل وتخفيض التكاليف، وتعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة، ويستكمل الحل كما هو متبع في طريقة المسار الحرج.

مثال (05): باستخدام جدول الحل الأساسي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال السابق، أوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل باستخدام طريقة التوزيع المعدل:

الحل:

للقيام بعملية الحل نتبع الخطوات التالية:

- من خلال جدول الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة هي 5، وبذلك يتم تكوين خمسة معادلات كما يلي:

$$C_{11} = U_1 + V_1 = 7$$
$$C_{12} = U_1 + V_2 = 3$$
$$C_{22} = U_2 + V_2 = 6$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 = 0$$
$$C_{33} = U_3 + V_3 = 9$$

- لما كان عدد المتغيرات يزيد على عدد المعادلات، ولغرض تسهيل عملية الحل، نفرض أن أحد المتغيرات يساوي الصفر حتى نتمكن من إيجاد قيم المتغيرات الأخرى، ولنفرض أن $U_1 = 0$ ، ومن المعدلات سوف نحصل على النتائج التالية:

$$V_1 = 7, \qquad U_1 = 0$$
$$V_2 = 3, \qquad U_2 = 3$$
$$V_3 = -3 \qquad U_3 = 12$$

- يتم تقييم الخلايا غير المشغولة، وذلك بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية غير مشغولة حسب العلاقة التالية: التكلفة غير المباشرة للخلية $\delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

الخلية غير المشغولة	التكلفة غير المباشرة
δ_{13}	$10 - (0 + 3) = 13$
δ_{21}	$4 - (3 + 7) = -6$
δ_{31}	$5 - (12 + 7) = -14$
δ_{32}	$8 - (12 + 3) = -7$

- بمقارنة النتائج مع تلك التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة المسار الحرج، نلاحظ تطابق هذه النتائج في الطريقتين.

- من التكاليف غير المباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X_{31} لها أكبر قيمة سالبة، لذلك يتم إشغالها بنقل كميات إليها بنفس الخطوات وفقا لطريقة المسار الحرج، حيث يتم رسم مسار مغلق لتحديد عدد الوحدات الواجب نقلها، وهكذا يتم اختبار أمثلية الحل لكل جدول وبنفس الخطوات السابقة للوصول إلى الحل الأمثل، حيث تكون التكاليف الكلية تساوي 152.

V. حالات خاصة لمشكلة النقل

قد تصادفنا في الحياة العملية حالات خاصة لمشكلة النقل، ترتبط بالواقع الفعلي للمؤسسات وطبيعة الأسواق، ولعل أهم هذه الحالات ما يلي:

1- عدم تساوي العرض مع الطلب Unbalanced Problem: إن إيجاد الحل الأولي أو الابتدائي، وإيجاد الحل الأمثل يتطلب شرطا أساسيا وهو تساوي العرض مع الطلب، غير أنه عمليا يصعب تحقق هذا الشرط في الواقع، إذ يكون إما العرض أكبر من الطلب أو العكس، وفي هذه الحالة ينبغي العمل على توفير هذا الشرط تحايلا، وذلك كمايلي:

- في حالة العرض أقل من الطلب، ينبغي إضافة سطر خيالي إلى جدول المسألة، حيث نفترض أن الكمية التي يعرضها هي قيمة الفرق بين العرض والطلب، وتكاليف النقل في هذا السطر نفترضها معدومة.
- في حالة العرض أكبر من الطلب، ينبغي إضافة عمود خيالي إلى جدول المسألة، حيث نفترض أن الكمية التي يطلبها هي قيمة الفرق بين العرض والطلب، وتكاليف النقل في هذا العمود نفترضها معدومة.

في كلتا الحالتين نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأولي ثم الحل الأمثل بصفة عادية، ثم نحذف في النهاية السطر أو العمود الذي تمت إضافته.

مثال (06): أوجد الحل الأولي بطريقة التكلفة الدنيا لمسألة النقل التالية:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	
المصنع A	5	8	5	400
المصنع B	4	7	9	300
المصنع C	6	2	3	100
الطلب	300	200	200	700 800

الحل:

نلاحظ أن العرض يفوق الطلب بمقدار 100، إذا لابد من موازنة العرض مع الطلب بإضافة مركز طلب وهمي ثم الاستمرار بحل المسألة كمايلي:

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	س.وهمي	
المصنع A	5	8 200	5 200	0	400
المصنع B	4 300	7	9	0	300
المصنع C	6 350	2	3	0 100	100
الطلب	300	200	200	100	800 800

نبدأ التخصيص للخلية التي تكون كلفتها أقل ما يمكن وهي هنا الصفر، لذا نختار أي من الخلايا الثلاث في عمود السوق الوهمي، وتخصيص كمية مقدارها 100، بعد ذلك نواصل الحل ونجد التكاليف الكلية كما يلي:

$$MIN(Z)=(8.200)+(5.200)+(4.300)+(0.100)=3800$$

2- حالة تعظيم الأرباح Profit Maximization: في بعض الأحيان تكون المؤسسة متخصصة بالنقل لصالح الغير، ولديها وسائل نقل تستخدمها في نقل المنتجات من أماكن مختلفة بهدف تحقيق أكبر ربح ممكن، لذا فهي تركز على الخطوط أو المسارات ذات الربح الأكبر، وهنا فإن حل المسألة سيكون بالبحث عن أكبر في الجدول، ويتم إرسال الكميات إلى تلك الخلية، وتكرر العملية إلى أن يتم نقل جميع الكميات المتاحة إلى الأسواق أو المخازن.

مثـــال (07): في الجدول التالي معطيات عن الكميات المطلوب نقلها من المخازن الخاصة بإحدى الـــوزارات إلى فروع المؤسسة الاستهلاكية الأربعة، بحيث يتحقق أكبر ربح ممكن للمؤسسة التي تعهـــدت بنقـــل هـــذه الكميات من البضائع، والمطلوب هو مساعدة المؤسسة الناقلة بإعداد خطة النقل:

المخازن	الفروع				الكمية المتاحة
	الفرع 1	الفرع 2	الفرع 3	الفرع 4	
المخزن A	6	8 400	3	10 100	500
المخزن B	9	2	7	11 700	700
المخزن C	12 200	5	4 100	10	300
احتياجات الفروع	200	400	100	800	1500

هنا يبدأ الحل بالبحث عن أكبر رقم في الجدول وهو 1، ونبدأ بالتخصيص له، ثم الأكبر وهـــو 11 وهكـــذا، وتكون الأرباح الكلية كما يلي:

$$MAX(Z)=(8.400)+(10.100)+(11.700)+(12.200)+(4.100)=14700$$

3- وجود أكثر من حل أمثل More Than One Optimal Solution: قد توجد في بعض مشاكل النقل عند حلها إمكانية لعدة حلول مثلى وليس حلا وحيدا، وهذا الأمر يمكن اكتشافه عندما تكون نتائج تقييم الخلايا غير المشغولة (مؤشرات التحسين) فيها واحدة أو أكثر ذات قيمة صفرية، هذا يعنـــي أنـــه يمكـــن أن تغيـــر اتجاهات بعض الشحنات إلى اتجاهات أخرى بنفس التكلفة الكلية، إن وجود حلول مثلى متعددة يعطـــي الإدارة مرونة أكبر في اختبار وتوزيع الموارد.

4- المسارات الممنوعة أو غير المقبولة Unaccepted or Prohibited Routs: في بعض الحالات يكون من المتعذر إرسال بعض الشحنات من بعض المصادر إلى بعض الأسواق أو المخازن لأسباب كثيـــرة كعدم صلاحية الطريق الأمر الذي يجعل من وسائل النقل تتعرض لأضرار وتكاليف تشغيلية عالية، ففي هـــذه الحالة فإن المسار الممنوع أو غير المقبول يتم تحديد تكلفة عالية جدا لـــه (M)، ويمكـــن أن تحـــل المســـألة بالطرق المعروفة، في حالة التعظيم فإن المسار الممنوع تخصص له كمية كبيرة ســـالبة (-M) أي خســـارة كبيرة.

5- حالة التفكك Degeneracy: ونعني بها أن عدد المتغيرات الداخلة في أي حل أولي (الخلايا المشغولة) لا تساوي عدد الأسطر زائد عدد الأعمدة ناقص واحدة، أي عدم تحقق الشرط (m+n-1)، وللتخلص من هذا المشكل أيضا نلجأ للتحايل، وذلك بوضع خلية تصورية أو أكثر حسب الحالة داخلة في الحل نفترض قيمتهـــا

تساويε، أي قيمة بجوار الصفر، ثم نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأمثل، ونهملها تماما في النهاية باعتبارها قيمة مساعدة فقط، ويتم ذلك سواء حصل التفكك في جدول الحل الأولي أو الجداول الموالية.

مثال (08): لو افترضنا أن إحدى المؤسسات تريد إعداد خطة نقل، وستعتمد طريقة الزاوية الشمالية الغربية كما في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	1	2	3	
A	8 100	2	6	100
B	10	9 100	9 20	120
C	7	10	7 80	80
الطلب	100	100	100	300

إن عدد الخلايا المشغولة هنا هو 4، في حين أنه يجب أن يكون 5 (5=1-3+3) لذا فإن الحل يعتبر متحللا، وهنا لابد من وضع قيمة صفرية في إحدى الخلايا الفارغة للتمكن من اختيار الحل، مثلا يمكن وضع صفر (0) في الخلية A_2 و B_1 ومعاملتها وكأنها خلية مشغولة والاستمرار باختيار الحل.

6- اختيار مواقع الوحدات الإنتاجية Facility Location Analysis: إن من أهم المعايير المعتمدة في اختيار مواقع الوحدات الإنتاجية هو تكلفة الإنتاج والتوزيع، حيث تفضل المؤسسات تلك المواقع التي تجعل من هذه التكلفة أدنى ما يمكن، قد تكون للمؤسسة عدة مواقع وتريد إضافة موقع آخر ويتم ترشيح مدينتين لاختيار إحداهما موقعا للمصنع الجديد، لذا تكون لدينا هنا مسألتي نقل وبناء على التكلفة الكلية لكل منهما يتم اختيار الأقل.

مثال (09): تنتج إحدى المؤسسات أجهزة إلكترونية، ولزيادة الطلب تفكر بافتتاح مصنع جديد يغطي الفرق بين طاقتها الانتاجية الحالية والطلب المتوقع، وقد رشحت موقعين لاختيار أحدهما (D وE) لإقامة المصنع إلى مصانعها (A,B,C)، وفي الجدول أدناه نجد تكلفة النقل للجهاز الواحد والطلب والعرض:

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4	
المصنع A	25	55	40	60	**15**
المصنع B	35	30	50	40	**6**
المصنع C	36	45	26	66	**14**
الطلب	**10**	**12**	**15**	**9**	**46 35**

أما تكلفة النقل للموقعين المرشحين فهي كالتالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب			
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4
المصنع D	60	38	65	27
المصنع E	35	30	41	50

أما تكاليف إنتاج الجهاز الواحد فقد كانت كالتالي:

المصنع	القائمة			المرشحة	
تكلفة إنتاج الجهاز الواحد	A	B	C	D	E
	48	50	52	53	49

والمطلوب تحديد أي من الموقعين (E,D) يتم اختياره لإقامة المصنع الجديد.

الحل:

هنا تتم صياغة مسألتين منفصلتين بحيث نأخذ في المسألة الأولى الموقع D مع المواقع القائمة (A,B,C)، وفي المسألة الثانية نأخذ الموقع E مع المواقع القائمة (A,B,C)، كذلك يجب إضافة تكلفة إنتاج الجهاز إلى تكلفة النقل لغرض حساب تكلفة التوزيع الكلية.

يجب ملاحظة كون الطاقة الانتاجية للمصنع المرشح هي الفرق بين العرض والطلب، وبما أن مجموع العرض هو 35 ألف جهاز والطلب هو 46 ألف جهاز، فإن طاقة المصنع المرشح ستكون (11 ألف جهاز=35-46).

أولا: المسألة الأولى

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 4	الفرع 2	السوق 3	السوق 4	
المصنع A	73 10	103	88 1	108 4	15
المصنع B	85	80 1	100	90 5	6
المصنع C	88	97	78 14	118	14
المصنع D	84	79	90	99	11
الطلب	10	12	15	9	46

نلاحظ في الجدول أن تكلفة النقل فد أضيف لها تكلفة الإنتاج، فمثلا الخلية A_1 تكلفة النقل فيها 25 وتكلفة إنتاج الجهاز الواحد في المصنع A هي 48، لذا فإن مجموعها يساوي 73 وكذا الأمر مع A_2 فإن 103 هي حاصل جمع 48 و55 وهكذا، والحل النهائي موضح في الجدول السابق حيث أن التكلفة الكلية هي 3.704.000 وحدة نقدية.

ثانيا: المسألة الثانية

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 4	الفرع 2	السوق 3	السوق 4	
المصنع A	73 10	103	88 1	108 4	15
المصنع B	85	80 1	100	90 5	6
المصنع C	88	97	78 14	118	14
المصنع E	84	79 11	90	99	11
الطلب	10	12	15	9	46

في المسألة الثانية فإن تكلفة النقل الكلية هي 3.741.000 وحدة نقدية، إن القرار هنا سيكون اختيار الموقع D لأنه أقل تكلفة مقارنة بالموقع E، وعليه فالمؤسسة تقيم مصنعها في هذا الموقع.

VI. تمارين محلولة

التمرين الأول: تمتلك شركة لصناعة التجهيزات الكهرومنزلية ثلاث (03) معامل في المدن (A,B,C)، وإن الطاقة الإنتاجية لهذه المعامل 350، 300 و300 وحدة يوميا على الترتيب، حيث تقوم بتجهيز أربع (04) أسواق، حيث يبلغ احتياجاتها من هذه التجهيزات 350، 225، 100 و125 وحدة يوميا، وأن تكلفة النقل من المدينة (A) إلى الأسواق الأربعة هي 10، 8، 12 و14 ألف دينار للوحدة على الترتيب، أما تكلفة النقل من المدينة (B) إلى الأسواق الأربعة هي 6، 7، 13 و11 ألف دينار للوحدة على الترتيب، وأن تكلفة النقل من المدينة (C) إلى الأسواق الأربعة هي 4، 9، 10 و5 ألف دينار للوحدة على الترتيب.

❖ **المطلوب:**

1- إعداد جدول النقل لهذه المسألة.

2- إيجاد الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكاليف الكلية.

الحل:

1- إعداد جدول النقل لهذه المسالة:

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4	
المدينة A	10	8	12	14	**350**
المدينة B	6	7	13	11	**300**
المدينة C	4	9	10	5	**300**
الطلب	**350**	**225**	**100**	**125**	800 / 950

بما أن الطلب (800) لا يساوي العرض (950)، أي أن المشكلة غير متوازنة، لذلك نضيف عمود تكون جميع تكاليف النقل فيه مساوية إلى الصفر لغرض موازنة المشكلة كما يلي:

مراكز العرض	مراكز الطلب					العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4	س.وهمي	
المدينة A	10	8	12	14	0	**350**
المدينة B	6	7	13	11	0	**300**
المدينة C	4	9	10	5	0	**300**
الطلب	**350**	**225**	**100**	**125**	**150**	**950**

2- إيجاد الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكاليف الكلية:

بإتباع الخطوات السابقة لطريقة الزاوية الشمالية الغربية نجد:

مراكز العرض	مراكز الطلب					العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4	س.وهمي	
المدينة A	10 350	8	12	14	0	350
المدينة B	6	7 225	13 75	11	0	300
المدينة C	4	9	10 25	5 125	0 150	300
الطلب	350	225	100	125	150	950

أما التكاليف الكلية فتحسب كما يلي:

$$MIN(Z)=(10.350)+(7.225)+(13.75)+(10.25)+(5.125)+(0.150)=6925$$

التمرين الثـــاني: تقوم المؤسسة الوطنية للمياه المعدنية بالجزائر بتموين المـــدن الشـــمالية الثلاثـــة للـــوطن بمنتوجاتها من المياه المعدنية عن طريق وحداتها الثلاث المعروفة، وتبحث هذه المؤسسة عن خطة لتمـــوين المدن الشمالية الثلاثة بمنتوجاتها بأقل تكلفة ممكنة، ولقد بينت دراسات المحاسبة التحليلية تكلفة نقـــل الوحـــدة الواحدة من كل وحدة إنتاج إلى مدينة شمالية كما هو موضح في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	الجزائر	عنابة	وهران	
موزاية	1	4	5	55
سعيدة	5	7	3	45
باتنة	10	8	9	20
الطلب	40	30	50	120

❖ **المطلوب:**

1- إيجاد الحل الأولي بالطرق الثلاث (الزاوية الشمالية الغربية، التكلفة الدنيا، وفوجل التقريبية).

2- إيجاد الحل الأمثل بالطريقتين (المسار الحرج، والتوزيع المعدل).

الحل:

1- إيجاد الحل الأولي (الابتدائي):

لإيجاد الحل الأولي يمكن استخدام ثلاثة طرق مختلفة هي:

1-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية: بإتباع الخطوات السابقة لطريقة الزاوية الشمالية الغربية نجد:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	الجزائر	عنابة	وهران	
موزاية	1 40	4 15	5	55
سعيدة	5	7 15	3 30	45
باتنة	10	8	9 20	20
الطلب	40	30	50	120

أما التكاليف الكلية فتحسب كما يلي:

$$MIN(Z)=(1.40)+(4.15)+(7.15)+(3.30)+(9.20)=475$$

2-1- طريقة التكلفة الدنيا: بإتباع الخطوات السابقة لطريقة التكلفة الدنيا نجد:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	الجزائر	عنابة	وهران	
موزاية	1 40	4 15	5	55
سعيدة	5	7	3 45	45
باتنة	10	8 15	9 5	20
الطلب	40	30	50	120

أما التكاليف الكلية فتحسب كما يلي:

$$MIN(Z)=(1.40)+(4.15)+(3.45)+(8.15)+(9.5)=400$$

3-1- طريقة فوجل التقريبية: بإتباع الخطوات السابقة لطريقة فوجل التقريبية نجد:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	الجزائر	عنابة	وهران	
موزاية	1 40	4 15	5	55
سعيدة	5	7	3 45	45
باتنة	10	8 15	9 5	20
الطلب	40	30	50	120

أما التكاليف الكلية فتحسب كما يلي:

$$MIN(Z)=(1.40)+(4.15)+(3.45)+(8.15)+(9.5)=400$$

2- إيجاد الحل الأمثل:

يمكن إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقتين:

2-1- طريقة المسار الحرج: باستخدام جدول الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية واتباع نفس خطوات الحل لطريقة المسار الحرج نجد:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	الجزائر	عنابة	وهران	
موزاية	1 40	4 15	5	55
سعيدة	5	7 15	3 30	45
باتنة	10	8	9 20	20
الطلب	40	30	50	120

- يتم التأكد من أن الحل الأولي قابل للحل الأمثل، إذ نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة يساوي 5، وأن الشرط عدد الخلايا المشغولة = (1 – 3 + 3) محقق.
- يتم رسم مسار مغلق للخلايا غير المشغولة.
- يتم حساب التكاليف غير المباشرة للمسارات المغلقة للخلايا غير المشغولة كما يلي:

- المسار الأول: ويخص الخلية غير المشغولة X_{13}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{13}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{13}$، ونحسب: $\delta_{13} = 5 - 3 + 7 - 4 = 5 > 0$

- المسار الثاني: ويخص الخلية غير المشغولة X_{21}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{21}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{21}$، ونحسب: $\delta_{21} = 5 - 1 + 4 - 7 = 1 > 0$

- المسار الثالث: ويخص الخلية غير المشغولة X_{31}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{31}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{33}\rightarrow X_{31}$، ونحسب: $\delta_{31} = 10 - 1 + 4 - 7 + 3 - 9 = 0$

- المسار الرابع: ويخص الخلية غير المشغولة X_{32}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{32}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{33}\rightarrow X_{32}$، ونحسب: $\delta_{32} = 8 - 7 + 3 - 9 = -5 < 0$

- من التكاليف غير المباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X_{32} لها قيمة سالبة، ولذلك يتم اختيارها لأنها تؤدي إلى تخفيض التكاليف، ويتم إشغالها بنقل كميات إليها، حيث تحدد الكمية التي ستنقل إليها من خلايا المسار المغلق على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة.
- إن عدد الوحدات الواجب نقلها إلى الخلية X_{32} تتحدد من المسار المغلق لها، إن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة هي (15) وحدة، يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة، وبذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق وتصبح كالتالي:

$X_{32} = 15$, $X_{22} = 15 - 15 = 0$, $X_{23} = 30 + 15 = 45$, $X_{33} = 20 - 15 = 5$

لنحصل بعدها على الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	الجزائر	عنابة	وهران	
موزاية	1 40	4 15	5	**55**
سعيدة	5	7	3 45	**45**
باتنة	10	8 15	9 5	**20**
الطلب	**40**	**30**	**50**	**120**

أما التكاليف الكلية فتساوي:

$$MIN(Z)=(1.40)+(4.15)+(3.45)+(8.15)+(9.5) = 400$$

لمعرفة هل الحل المحقق في الجدول السابق يمثل الحل الأمثل أم لا، يجب اختبار أمثلية الجدول من خلال نفس القواعد السابقة والتي تتمثل في دراسة أثر إشغال الخلايا غير المشغولة التكلفة الكلية كما يلي:

- المسار الأول: ويخص الخلية غير المشغولة X_{13}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{13}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{32}\rightarrow X_{33}\rightarrow X_{13}$، ونحسب: $\delta_{13} = 5 - 9 + 8 - 4 = 0$

- المسار الثاني: ويخص الخلية غير المشغولة X_{21}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{21}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{32}\rightarrow X_{33}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{21}$، ونحسب: $\delta_{21} = 5 - 1 + 4 - 8 + 9 - 3 = 6 > 0$

- المسار الثالث: ويخص الخلية غير المشغولة X_{22}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{22}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{33}\rightarrow X_{32}\rightarrow X_{22}$، ونحسب: $\delta_{22} = 7 - 3 + 9 - 8 = 5 > 0$

- المسار الرابع: ويخص الخلية غير المشغولة X_{31}، ويتشكل مسارها المغلق كما يلي :

$X_{31}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{32}\rightarrow X_{31}$، ونحسب: $\delta_{31} = 10 - 1 + 4 - 8 = 5 > 0$

بما أن كل قيم δ_{ij} غير سالبة، فإن الجدول السابق يمثل جدول الحل الأمثل، بحيث أن التكاليف الكلية تساوي 400.

2-2- طريقة التوزيع المعدل: باستخدام جدول الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية واتباع نفس خطوات الحل لطريقة التوزيع المعدل نجد:

- نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة هي 5، وبذلك يتم تكوين خمس معادلات كما يلي:

$$C_{11} = U_1 + V_1 = 1$$
$$C_{12} = U_1 + V_2 = 4$$
$$C_{22} = U_2 + V_2 = 7$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 = 3$$
$$C_{33} = U_3 + V_3 = 9$$

- لما كان عدد المتغيرات يزيد على عدد المعادلات، ولغرض تسهيل عملية الحل، نفرض أن أحد المتغيرات يساوي الصفر حتى نتمكن من إيجاد قيم المتغيرات الأخرى، ولنفرض أن $U_1 = 0$، ومن المعدلات سوف نحصل على النتائج التالية: $V_1 = 1, \quad U_1 = 0$

$$V_2 = 4, \quad U_2 = 3$$
$$V_3 = 0, \quad U_3 = 9$$

- يتم تقييم الخلايا غير المشغولة، وذلك بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية غير مشغولة حسب العلاقة التالية: التكلفة غير المباشرة للخلية $\delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

الخلية غير المشغولة	التكلفة غير المباشرة
δ_{13}	$5 - (0 + 0) = 5 > 0$
δ_{21}	$4 - (3 + 1) = 1 > 0$
δ_{31}	$10 - (9 + 1) = 0 = 0$
δ_{32}	$8 - (9 + 4) = -5 < 0$

- بمقارنة النتائج مع تلك التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة المسار الحرج، نلاحظ تطابق هذه النتائج في الطريقتين.

- من التكاليف غير المباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X_{32} لها قيمة سالبة، لذلك يتم إشغالها بنقل كميات إليها بنفس الخطوات وفقا لطريقة المسار الحرج، حيث يتم رسم مسار مغلق لتحديد عدد الوحدات الواجب نقلها، لنحصل على الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	الجزائر	عنابة	وهران	
موزاية	1 40	4 15	5	**55**
سعيدة	5	7	3 45	**45**
باتنة	10	8 15	9 5	**20**
الطلب	**40**	**30**	**50**	**120**

- نختبر الحل من جديد وهذا بنفس الخطوات السابقة، ونفرض أن $U_1 = 0$، ومن المعدلات سوف نحصل على النتائج التالية:

$$V_1 = 1, \qquad U_1 = 0$$
$$V_2 = 4, \qquad U_2 = -2$$
$$V_3 = 5, \qquad U_3 = 4$$

- يتم تقييم الخلايا غير المشغولة، وذلك بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية غير مشغولة حسب العلاقة التالية: التكلفة غير المباشرة للخلية $\delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

الخلية غير المشغولة	التكلفة غير المباشرة
δ_{13}	$5 - (0 + 5) = 0 = 0$
δ_{21}	$4 - (-2 + 1) = 5 > 0$
δ_{22}	$7 - (-2 + 4) = 5 > 0$
δ_{21}	$10 - (4 + 1) = 5 > 0$

- بما أن كل قيم δ_{ij} غير سالبة، فإن الجدول السابق يمثل جدول الحل الأمثل، بحيث أن التكاليف الكلية تساوي 400.

<u>التمرين الثالث:</u> مؤسسة تقوم بإنتاج (03) أنواع من المنتجات وتقوم بتوزيعها على (04) أربع أسواق، بحيث أن تكلفة نقل الوحدة الواحدة من كل منتوج إلى كل سوق، وكمية المنتجات المعروضة والمطلوبة موضحة في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4	
المنتوج 1	6	7	8	9	**40**
المنتوج 2	13	10	9	3	**70**
المنتوج 3	9	11	4	5	**90**
الطلب	**30**	**50**	**45**	**75**	**200**

❖ **المطلوب:**

1- إيجاد الحل الأولي بالطرق الثلاثة.

2- إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدل باستخدام الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

الحل:

1- إيجاد الحل الأولي بالطرق الثلاثة:

1-1- يجاد الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

بما أن العرض يساوي الطلب نتبع الخطوات السابقة لطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4	
المنتوج 1	6 30	7 10	8	9	40
المنتوج 2	13	10 40	9 30	3	70
المنتوج 3	9	11	4 15	5 75	90
الطلب	30	50	45	75	200

أما التكاليف الكلية فتحسب كما يلي:

MIN(Z)=(6.30)+(7.10)+(10.40)+(9.30)+(4.15)+(15.75)=1355

1-2- إيجاد الحل الأولي بطريقة التكلفة الدنيا:

بما أن العرض يساوي الطلب نتبع الخطوات السابقة لطريقة التكلفة الدنيا:

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4	
المنتوج 1	6 30	7 10	8	9	40
المنتوج 2	13	10	9	3 70	70
المنتوج 3	9	11 40	4 45	5 5	90
الطلب	30	50	45	75	200

أما التكاليف الكلية فتحسب كما يلي:

MIN(Z)=(6.30)+(7.10)+(11.40)+(4.45)+(3.70) +(5.5)=985

1-3- إيجاد الحل الأولي بطريقة فوجل التقريبية:

بما أن العرض يساوي الطلب نتبع الخطوات السابقة لطريقة فوجل التقريبية:

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4	
المنتوج 1	6 30	7 10	8	9	40
المنتوج 2	13	10	9	3 70	70
المنتوج 3	9	11 40	4 45	5 5	90
الطلب	30	50	45	75	200

أما التكاليف الكلية فتحسب كما يلي:

$$MIN(Z)=(6.30)+(7.40)+(11.10)+(4.45)+(3.70)+(5.5)=985$$

2- إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدل باستخدام الحل الأولي لطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

$$U_1 = 0,\quad U_2 = 3,\quad U_3 = -2$$

$$V_1 = 6,\quad V_2 = 7,\quad V_3 = 6,\quad V_4 = 7$$

نبحث عن الخانات الفارغة أو غير المشغولة بالعلاقة التالية: $\delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

الخلية غير المشغولة	التكلفة غير المباشرة
δ_{13}	$8 - (0 + 6) = 2 > 0$
δ_{14}	$9 - (0 + 7) = 2 > 0$
δ_{21}	$9 - (0 + 7) = 4 > 0$
δ_{24}	$3 - (3 + 7) = -7 < 0$
δ_{31}	$9 - (-2 + 6) = 5 > 0$
δ_{32}	$11 - (-2 + 7) = 6 > 0$

الخلية التي لها قيمة سالبة هي δ_{24}، وقد تم إشغالها كما في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4	
المنتوج 1	6 30	7 10	8	9	40
المنتوج 2	13	10 40	9	3 30	70
المنتوج 3	9	11	4 45	5 45	90
الطلب	30	50	45	75	200

أما التكاليف الكلية فتحسب كما يلي:

MIN(Z)=(6.30)+(7.10)+(10.40)+(3.30)+(4.45)+(5.45)=1145

لاختبار أمثلية الحل للجدول السابق يتم ذلك كما يلي:

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 3, \quad U_3 = 5$$
$$V_1 = 6, \quad V_2 = 7, \quad V_3 = -1, \quad V_4 = 0$$

نبحث عن الخانات الفارغة أو غير المشغولة بالعلاقة التالية: $\delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

الخلية غير المشغولة	التكلفة غير المباشرة
δ_{13}	$8 - (0 - 1) = 9 > 0$
δ_{14}	$9 - (0 + 0) = 9 > 0$
δ_{21}	$13 - (3 + 6) = 4 > 0$
δ_{23}	$9 - (3 - 1) = 7 > 0$
δ_{31}	$9 - (5 + 6) = -2 < 0$
δ_{32}	$11 - (5 + 7) = -1 < 0$

إن الخلية δ_{31} هي أكبر قيمة سالبة وقد تم إشغالها كما في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4	
المنتوج 1	6	7 10	8	9	40
المنتوج 2	13	10 40	9	3 60	70
المنتوج 3	9 30	11 40	4 45	5 15	90
الطلب	30	50	45	75	200

أما التكاليف الكلية فتحسب كما يلي:

MIN(Z)=(9.30)+(7.40)+(10.10)+(9.30)+(4.45)+(5.15)=1085

لاختبار أمثلية الحل للجدول السابق يتم ذلك كما يلي:

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 3, \quad U_3 = 4$$
$$V_1 = 6, \quad V_2 = 7, \quad V_3 = 0, \quad V_4 = 1$$

نبحث عن الخانات الفارغة أو غير المشغولة بالعلاقة التالية: $\delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

الخلية غير المشغولة	التكلفة غير المباشرة
δ_{11}	$6 - (0 + 6) = 0 = 0$
δ_{13}	$8 - (0 + 0) = 8 > 0$
δ_{14}	$9 - (0 + 1) = 8 > 0$
δ_{21}	$13 - (3 + 6) = 4 > 0$
δ_{23}	$9 - (3 + 0) = 6 > 0$
δ_{32}	$11 - (4 + 7) = 0 = 0$

إن التكلفة غير المباشرة للخلايا الفارغة هي أرقام موجبة، وعليه فإن الجدول الأخير هو الحل الأمثل والتكاليف هي 1085.

VII. تمارين غير محلولة

التمرين الأول: تقوم مؤسسة بإنتاج منتوج معين في ثلاث مصانع A , B, C ، ويوزع على أربع أسواق، والجدول التالي يبين الكميات المعروضة والمطلوبة وتكلفة نقل الوحدة الواحدة:

مراكز العرض	مراكز الطلب				العرض
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4	
المصنع A	10	0	20	11	**15**
المصنع B	12	7	9	20	**25**
المصنع C	0	14	16	18	**5**
الطلب	**5**	**15**	**15**	**10**	**45**

❖ **المطلوب:**

1- إيجاد الحل الأولي بالطرق الثلاثة المعروفة.

2- إيجاد الحل الأمثل بالطريقتين المعروفتين.

التمرين الثاني: لدى إحدى المؤسسات الصناعية ثلاث مصانع، ويتم توزيع إنتاجها على أربعة أسواق رئيسية، إذا علمت أن إنتاج كل مصنع هو: 100، 120، 140 على التوالي، وأن الكميات المطلوبة في الأسواق الأربعة هي: 70، 130، 50، 50 على التوالي، وأن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل مصنع إلى كل سوق موضحة في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب			
	السوق 1	السوق 2	السوق 3	السوق 4
المصنع 1	10	0	20	11
المصنع 2	12	7	9	20
المصنع 3	0	14	16	18

❖ **المطلوب:**

1- إيجاد الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2- إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدل.

التمرين الثالث: تقوم مؤسسة لإنتاج الملابس في ثلاث مصانع بتوزيعها على ثلاثة مدن مختلفة، حجم الملابس المنتجة في كل مصنع والمطلوبة في كل مدينة، وكذا تكلفة نقل الوحدة الواحدة من كل مصنع إلى كل مدينة موضحة في الجدول التالي:

مراكز العرض	مراكز الطلب			العرض
	المدينة 1	المدينة 2	المدينة 3	
المصنع 1	5	1	8	**12**
المصنع 2	2	4	0	**14**
المصنع 3	3	6	7	**4**
الطلب	**9**	**10**	**11**	**30**

❖ **المطلوب:**

1- إيجاد الحل الأولي بطريقة فوجل التقريبية.

2- إيجاد الحل الأمثل بطريقة المسار الحرج.

المحور السابع: مدخل للبرمجة غير الخطية
Introduction To Nonlinear Programming

لقد ذكرنا في المحاور السابقة أن الكثير من العلاقات الاقتصادية تأخذ صيغة خطية، ولكن نجد في الواقع علاقات تأخذ صيغة غير خطية قد تكون خطية حرة لا قيود عليها، أو قد تكون مقيدة بشروط معينة وتسمى بالدوال غير الخطية أو البرامج غير الخطية (Nonlinear Programing) والتي يرمز لها اختصارا بـ (NLP).

I. مفهوم البرمجة غير الخطية

البرمجة غير الخطية أو البرنامج غير الخطي هو البرنامج الرياضي بشكله العام حيث تكون دالة الهدف أو القيود أو كلاهما غير خطية، ويعتقد أن أكثر الطرق شيوعا لحل البرنامج غير الخطي هي طريقة دوال الجزاء والحد التكرارية، ويعتبر البرنامج غير الخطي أصعب أنواع البرمجة حيث لم يتفق على أمثل طريقة لحل هذا النوع من البرامج الرياضية، وتنقسم البرامج غير الخطية إلى ثلاث أنواع أساسية: البرامج غير المقيدة (Unconstrained NLP) وهي البرامج التي تتبدل فيها المتغيرات في دالة الهدف دون أي شروط أو محددات، البرامج المقيدة (Constrained NLP) وهي البرامج التي تتضمن محددات على التغيرات التي تحدث في المتغيرات الواردة فيها، إضافة إلى البرامج التربيعية (Quadratic Programming) وهي البرامج التي تكون فيها دالة الهدف من الدرجة الثانية ومثقلة بمحددات متباينة خطية.

II. البرمجة غير الخطية- أمثلية المتغير المفرد Nonlinear Programing : Single-Variable Optimization

إن البرنامج غير الخطي غير المقيد، للمتغير المفرد يأخذ الصيغة:

أمثليـــة: $z = f(x)$ .....(1)

حيث أن $f(x)$ تكون دالة (غير خطية) في المتغير المفرد x، ويكون البحث عن الأمثلية (تعظيم أو تصغير) في الفترة غير المحددة $(+\infty, -\infty)$. وإذا كان البحث مقيدا في فترة محددة أقل [a,b]، فإن المسألة تصبح:

أمثلية: $z = f(x)$ .....(2)

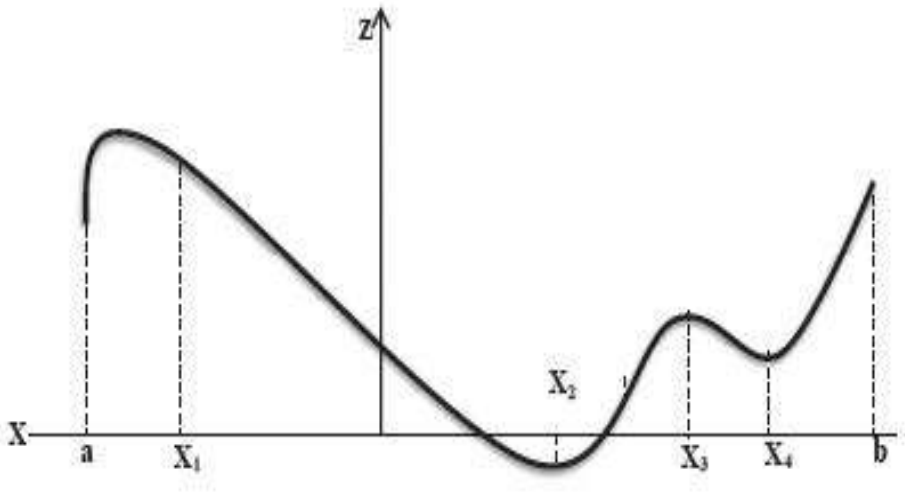
علما بأن: $a \leq x \leq b$

والذي يعتبر برنامجا مقيدا لمتغير واحد.

1- الأمثلية المحلية والشاملة Local And Global Optima: للدالة الهدفية $f(x)$ حد أدنى محلي (أو نسبي) عند x_0 إذا وجدت فترة (صغيرة) ذات مركز عند x_0 بحيث أن $f(x) \geq f(x_0)$ لكل قيم x في هذه الفترة التي تحدد فيها الدالة. إذا كانت $f(x) \geq f(x_0)$ لكل قيم x التي تحدد فيها الدالة، فيكون الحد الأدنى عند x_0 (بجانب كونه محليا) حدا أدنى شاملا (أو مطلقا)، تعرف الحدود الأعلى المحلية أو الشاملة بالتماثل بمعرفة المتباينات المعكوسة.

<u>مثال (01)</u>: الدالة المرسومة في الشكل (01) تحدد على [a-b] فقط، ولها حد أدنى نسبي عند x_4، x_2، a، وحد أعلى نسبي عند b، x_3، x_1 وحد أدنى شامل عند x_2؛ وحد أعلى شامل عند b، x_1.

الشكل (01)



بحيث يبحث البرنامج (1) عن أمثلية شاملة، وكذلك البرنامج (2) أيضا، إلى الحد الذي يبحث فيه عن أفضل أمثلية محلية في الفترة [a-b] ومن الممكن أن تفرض الدالة الهدفية قيما أفضل خارج [a-b] ولكن هذا خارج الاهتمام.

2- نظريات حول التفاضل والتكامل Results From Calculus: تتمثل هذه النظريات فيما يلي:

- إذا كانت $f(x)$ مستمرة في الفترة المقفلة والمحددة [a-b] فإن $f(x)$ يكون لها أمثلية شاملة (كلا من التعظيم والتصغير) على هذه الفترة.
- إذا كانت $f(x)$ أمثلية محلية عند x_0، إذا كانت $f(x)$ قابلة للتفاضل في جزء الفترة ذات المركز عند x_0 فإن $f'(x_0) = 0$.
- إذا كانت $f(x)$ يمكن تفاضلها مرتين في جزء الفترة ذات المركز عند x_0، وإذا كانت بدلا من $f'(x_0) = 0$ ، $f''(x_0) < 0$ ، فإن $f(x)$ يكون لها حدا أعلى محلي عند x_0.

ويتبع من النظريتين الأوليتين أنه إذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة [a-b] فإن الأمثلية المحلية والشاملة للبرنامج (2) تحدث بين النقاط التي لا تتواجد فيها $f'(x)$ أو بين النقاط حيث $f'(x) = 0$ (وغالبا ما تسمى بالنقاط الساكنة أو الحرجة) أو بين النقاط النهائية $x = a$، $x = b$.

وحيث أن البرنامج (1) غير مقيد بفترة مغلقة ومحددة، فإنه لا توجد نقط نهائية للأخذ في عين الاعتبار، وبدلا من ذلك، فإن قيم الدالة الهدفية عند النقاط الساكنة وعند النقاط التي لا توجد فيها $f'(x)$ تقارن بالقيم النهائية لـــ $f(x)$ عندما $x \to \pm\infty$ وقد يحدث ألا توجد أي نهاية منهما (اعتبر $f(x) = \sin x$)، ولكن إذا وجدت أي من النهايتين وقبلنا $\pm\infty$ ((كنهاية))، وأدت إلى أفضل قيمة $f(x)$ (الأكبر لبرنامج تعظيم، والأصغر لبرنامج تصغير)، فإن الأمثلية الشاملة لـــ $f(x)$ لا توجد، وإذا حدثت أفضل قيمة عند إحدى النقاط المحددة فإن أفضل قيمة هذه تكون أمثلية شاملة.

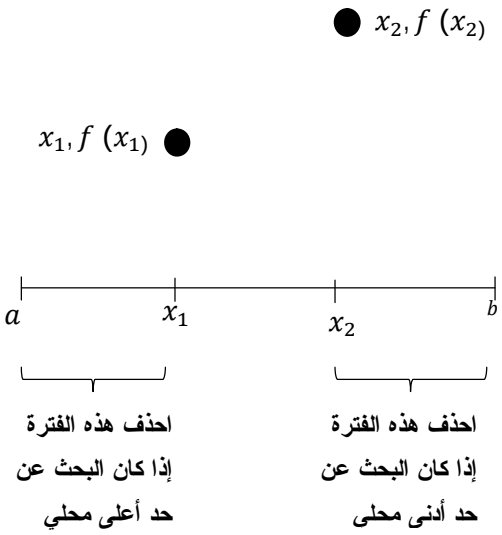
3- أساليب البحث التتابعي (التسلسلي) Sequential-Search Techniques: من الناحية العملية فإن تحديد الأمثلية بالتفاضل والتكامل يكون غير مثمر، إما لأن الدالة الهدفية تكون غير معروفة حسابيا، فيكون التفاضل مستحيلا، أو أن النقاط الساكنة لا يمكن الحصول عليها جبريا، وفي هذه الحالات تستخدم الطرق العددية لتقريب مكان الأمثلية المحلية في حدود تفاوتات مقبولة.

وتبدأ أساليب البحث التتابعي بفترة محددة يفترض أن تكون فيها الدالة الهدفية ذات نموذج أحادي، بمعنى أن هذه الفترة يفترض أن تحتوي على نقطة واحدة فقط عندها $f(x)$ يكون لها حد أدنى، أو حد أعلى محلي، ثم تقلل هذه الأساليب بانتظام الفترة حول القيمة المثلى المحلية، حتى تضيق القيمة المثلى داخل حدود مقبولة، وهذا التقليص يتأثر بالتقييم المتتابع للدالة الهدفية عند نقاط مختارة، ثم استخدام خاصية النموذج الأحادي لحذف أجزاء من الفترة الحالية.

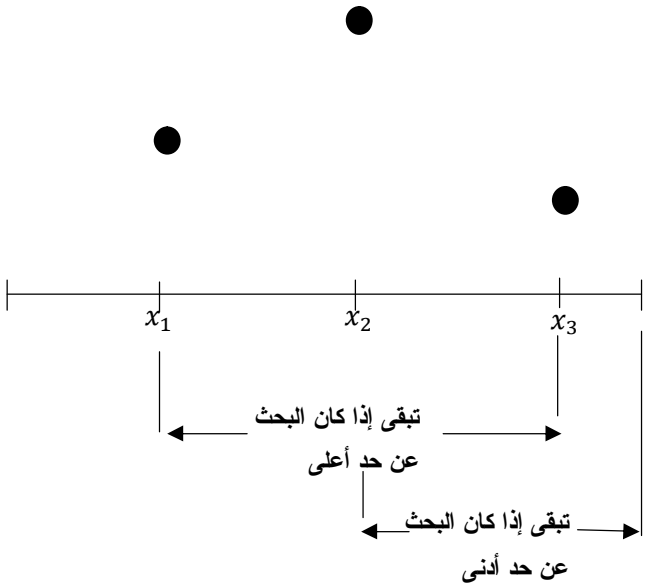
<u>مثال (02):</u> يعرض الشكل (02) قيم الدالة الهدفية عند النقاط x_2، x_1، إذا عرف حد أدنى محلي ليكون الطرف الوحيد في الفترة [a-b] فإن هذا الحد الأدنى يجب أن يكون إلى اليسار من x_2، لذلك فإن $f(x)$ تبدأ في الزيادة حول هذه النقطة، وبخاصية النموذج الأحادي، يجب أن تستمر في الزيادة لجهة اليمين منها، ومن ثم جزء الفترة $[x_2 - b]$ يمكن حذفه.

وإذا كان الحد الأعلى المحلي هو الطرف الوحيد في الفترة [a-b] فإنه يجب أن يكون على اليمين من x_1، ويمكن حذف جزء الفترة $[a_1 - x_1]$.

الشكل (02)



الشكل (03)



ويمكن اعتبار البحوث التتابعية النوعية في الأجزاء الثلاثة الآتية:

- **بحث فترة الثلاث نقاط Three-Point Interval Search:** تقسم الفترة تحت الاعتبار إلى أربـاع، وتقيم الدالة الهدفية عند الثلاث نقاط الداخلية على مسافات متساوية، وتحدد النقطة الداخلية التي تـؤدي إلـى أفضل قيمة للهدف (في حالة الاشتراك يتم اختيار إحدى النقاط)، ويحل جزء الفترة التي مركزها عنـد هـذه النقطة، والمتكونة من ربعين من الفترة الحالية، وتوجد 10 أنماط ممكنة من العينات بما فيها المشتركة، يمثل أحدها في الشكل (03).

وبحث فترة الثلاث نقاط هو أكفأ طريقة بحث على مسافات متساوية بالنسبة للوصول إلى تفـاوت محـدد مسبقا بأقل عدد من تقييمات الدوال، وهو أيضا أحد أسهل البحوث التتابعية لاستخدام الحاسبات.

- **بحث فيبوناكس Fibonacci Search:** يمثل تتابع فيبوناكس{...,55,34,21,13,8,5,3,2,1,1}= $\{F_n\}$ أساس أحد أكفأ أساليب البحث التتابعي، ويتم الحصول على كل عدد في تتابع بإضـافة العـددين السـابقين، باستثناء العددين الأوليين، F_1، F_0 الذين يكونان 1.

ينشأ بحث فيبوناكس بتجديد أصغر عدد فيبوناكسي يحقق $F_n\epsilon \geq b \quad a$، حيث أن ϵ هي تفاوت محـدد مسبقا، و[a-b] الفترة الأصلية، كون $\epsilon' \equiv (b-a)/F_n$. تقع النقطتان الأولتان في البحث إلـى الـداخل عدد $F_{n-1\epsilon}$، وحدة من نقاط النهاية [a-b]، حيث أن F_{n-1} هو عدد فيبوناكس الذي يسبق F_n، ويمكن أخـذ النقاط الأخرى في الاعتبار واحدة بواحدة، وتوضع إلى الـداخل عـدد $F_{j\epsilon'}(j = N-2, N-3, \dots, 2)$

وحدة من أحدث نقطة نهاية للفترة الحالية، نلاحظ أنه بطريقة فيبوناكس يمكن مقدما تحديد عدد تقييمات الدوال المطلوبة لتحقيق دقة معينة، وأكثر من ذلك، هذا العدد لا يعتمد على الدالة الخاصة أحادية النموذج.

- **بحث المتوسط الذهبي Golden-Mean Search:** يبنى بحث فيبوناكس القريب من الكفاءة على $(\sqrt{5}-1)/2 = 0.6180$.... الذي يعرف بالمتوسط الذهبي، وتقع النقطتان الأولتان للبحث على مسافة (0.6180)(b-a) وحدة إلى الداخل، من النقاط النهائية للفترة الأولية [a-b]، وتؤخذ النقاط المثالية التالية في الاعتبار، واحدة بعد أخرى، وتوضع إلى الداخل $0{,}6180L_i$ وحدة، من أحدث نقطة نهائية للفترة الحالية، حيث L_i تدل على طول هذه الفترة.

- **الدوال المقعرة Convex Functions:** تضمن طرق البحث تقريب القيم المثلى الشاملة في فترة البحث فقط، عندما تكون الدالة الهدفية أحادية النموذج، وعمليا لا يمكن معرفة ما إذا كانت الدالة الهدفية أحادية النموذج في فترة محددة، وعند تطبيق طريقة البحث في هذه الحالة، فإنه ليس من المؤكد أنها ستكشف القيمة المثلى الشاملة المطلوبة، ويستثنى من ذلك البرامج التي تحتوي على دوال هدفية محدبة أو مقعرة.

تكون الدالة $f(x)$ مقعرة في الفترة φ (محددة أو غير محددة) إذا كانت النقطتان x_1 ، x_2 في φ ولكل $0 \leq \alpha \leq 1$

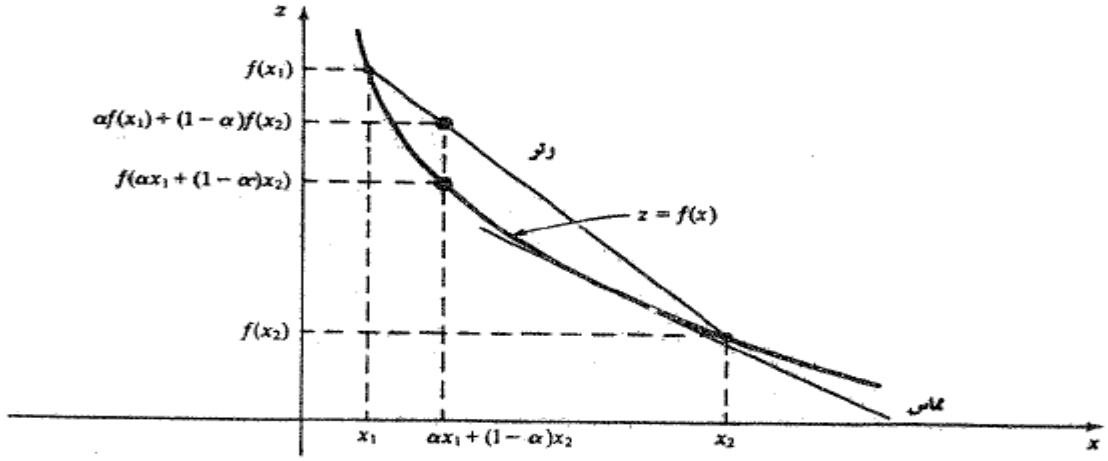
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \quad \text{.....(3)}$$

إذا كانت العلاقة (3) تتحقق بمعكوس المتباينة، فإن $f(x)$ تكون محدبة، لذلك فالقيمة السالبة للدالة المقعرة تكون محدبة، والعكس صحيح، ويبين الشكل (4) رسم الدالة المقعرة، وبالتحديد الخصائص الهندسية للرسم، فإن المنحنى يقع على أو فوق أحد مماساته، والدوال المحدبة أو المقعرة تكون أحادية النموذج.

نظريات:

- إذا كانت $f(x)$ تفاضل مرتين في φ ، فإن $f(x)$ تكون مقعرة في φ إذا كانت فقط $f''(x) \geq 0$ لكل قيم x في φ، وتكون محدبة إذا كانت فقط $f''(x) \leq 0$ لكل قيم x في φ.
- إذا كانت $f(x)$ مقعرة فيφ ، فإن أي حد أدنى محلي في φ يكون حدا أدنى شاملا في φ، وإذا كانت $f(x)$ محدبة في φ ، فإن أي حد محلي في φ يكون حدا أعلى في φ .

الشكل (04)



III. البرمجة غير الخطية-أمثلية متعدد المتغيرات بدون قيود: Nonlinear Programming

Multivariable Optimization without Contraints

إن البرنامج غير الخطي غير المقيد لأكثر من متغير يأخذ الصيغة التالية:

أمثلية $z=f(x)$ حيث أن $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\tau$ .....(1)

حيث أن $f(x)$ دالة غير خطية لأكثر من متغير x، ويكون البحث عن الأمثلية لتكون تعظيما في جميع المراحل وفي الفترة غير المقيدة $(-\infty, +\infty)$، وتنطبق جميع النتائج على برامج التصغير إذا استبدلت $f(x)$ بـ $-f(x)$.

1- الحدود العظمى المحلية والشاملة Local And Global Maxima: إذا كان $(\epsilon > 0)$ حول $\hat{x}$، هو مجموعة كل المتجهات x بحيث أن:

$$(x - \hat{x})^T (x - \hat{x}) = (x_1 - \hat{x}_1)^2 (x_2 - \hat{x}_2)^2 + \cdots + (x_n - \hat{x}_n)^2 \leq \epsilon^2$$

بالتعبير بالهندسة التحليلية، يكون ϵ حول $\hat{x}$ هو المداخل والحدود لكرة متعددة الأبعاد نصف قطرها ϵ ومركزها $\hat{x}$.

والدالة الهدفية $f(x)$ لها حد أعلى محلي عند $\hat{x}$ إذا وجد ϵ حول $\hat{x}$ بحيث إن $f(x) \leq f(\hat{x})$ لكل قيم x في ϵ الذي تحدد فيه الدالة، وإذا تحقق الشرط لكل قيمة موجبة ϵ (ليس المهم القيمة نفسها)، فإن $f(x)$ يكون لها حدا أعلى شامل عند $\hat{x}$.

2- المتجه المتدرج ومصفوفة هسى Gradient Vector And Hessian Matrix: المتجه المتدرج ∇f المرتبط بالدالة $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ الذي تعرف له المشتقة الجزئية الأولى:

$$\nabla f = [\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n}]^T$$

والتعبير $\nabla f|\hat{x}$ يحقق قيمة التدرج عند $\hat{x}$ لأي إزاحة صغيرة من $\hat{x}$ في الاتجاهات المختلفة، واتجاه أعلى زيادة في $f(x)$ هو اتجاه المتجه $\nabla f|\hat{x}$.

مثال (03): إذا كان لدينا: $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 - x_3^2 x_3^3$ مع $\hat{x} = [1,2,3]^T$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 6x_{1x_2} \\ 3x_1^2 - 2x_2 x_3^3 \\ -3x_3^2 x_3^2 \end{bmatrix}$$

حيث أن: $$\nabla f|x = \begin{bmatrix} 6(1)(2) \\ 3(1)^2 - 2(2)(3)^3 \\ -3(2)^2(3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -105 \\ -108 \end{bmatrix}$$

لذلك، عند $[1,2,3]^T$، تزيد الدالة بسرعة في الاتجاه $[12, -105, -108]^T$، ومصفوفة هسى المرتبطة بالدالة $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ التي لها مشتقة جزئية ثانية تكون:

$$H_f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}\right] (i, j = 1,2, \dots, n)$$

والتعبير $H_{f|\hat{X}}$ يحقق قيمة المصفوفة هسى عند $\hat{x}$، حيث أن المصفوفة المتماثلة A $n \times n$ (بحيث أن $A = A^T$) تكون سالبة مؤكدة (سالبة نصف مؤكدة) إذا كانت $X^T AX$ سالبة (غير موجبة) لكل متجه ذي أبعاد n $X \neq 0$.

نظرية:

لتكن $A = [A_{ij}]$ مصفوفة متماثلة $n \times n$ ونحدد المحددات:

$$A_1 = [a_{11}] \quad A_2 = -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A_3 = +\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_n = (-1)^{n-1} \det A$$

فتكون A سالبة مؤكدة إذا كانت فقط $A_1 A_2 \dots A_n$ كلها سالبة، وتكون A سالبة نصف مؤكدة إذا كانت فقط، $(r<n)$ $A_1 A_2 \dots A_n$ كلها سالبة، وعناصر A الباقية تكون صفرية.

مثال (04): لتكن الدالة التالية:

$$H_f = \begin{bmatrix} 6x_2 & 6x_1 & 0 \\ 6x_1 & -2x_3^3 & -6x_2 x_3^2 \\ 0 & -6x_2 x_3^2 & -6x_3^2 x_3 \end{bmatrix}$$

حيث: $$H_{f|\hat{X}} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & -54 & -108 \\ 0 & -108 & -72 \end{bmatrix}$$

لـــ: $A_i = 12 > 0$ $H_{f|\hat{X}}$ بحيث أن H_f لا تكون سالبة مؤكدة أو حتى سالبة نصف مؤكدة عند $\hat{X}$.

3- نظريات حول التفاضل والتكامل Results From Calculus:

- إذا كانت *f(x)* متصلة في منطقة محددة مغلقة، فإن *f(x)* يكون لها حد أعلى شامل (وحد أدنى شامل أيضا) في هذه المنطقة.
- إذا كانت *f(x)* لها حد أعلى محلي (أو حد أدنى محلي) عند x^*، وإذا كانت ∇f توجد في بعض ϵ حول x^*، فإن $\nabla f|x^* = 0$.
- إذا كانت *f(x)* لها مشتقة جزئية ثانية في ϵ حول x^*، وإذا كانت $\nabla f|x^* = 0$ ، $H_{f|x^*}$ سالبة مؤكدة، فإن *f(x)* يكون لها حد أعلى محلي عند x^*.
- يتبع من النظريات السابقة أن *f(x)* متصلة، ويفرض الحد الأعلى الشامل لها بين هذه النقاط التي لا توجد عندها $\nabla f = 0$ (النقاط الساكنة)، إلا إذا فرضت الدالة قيما أكبر مثل $X^T X \to +\infty$، في الحالة الأخيرة لا يوجد حد أعلى شامل.

والحلول التحليلية المبنيَة على التفاضل والتكامل من الصعب الحصول عليها للبرامج متعددة المتغيرات، عنها في حالة البرامج مفردة المتغيرات، لذلك مرة أخرى، تستخدم الطرق العددية لتقريب الحدود العليا (المحلية) في حدود تفاوت موصف والمتمثلة فيما يلي:

1- طريقة أقصى ميل صعود The Method Of Steepest Ascent: يتم اختيار متجها أوليا x_0، والاستفادة من أي معلومة سابقة لمعرفة أين يجب أن يوجد الحد الأعلى الشامل المطلوب، ثم يتم تحديد المتجهات ... $x_1\ x_2\ x_3$ بالعلاقة التكرارية:

$$x_{k+1} = x_k + \Lambda_k^* \nabla f|x_k \quad \text{.....(2)}$$

وهنا Λ_k^* تكون كمية قياسية موجبة تعظم $f(x_k + \Lambda \nabla f|x_k)$ ويحل هذا البرنامج ذو المتغير المفرد بالطرق المذكورة سابقا، ويكون الأفضل إذا مثلت Λ_k^* حدا أعلى شاملا، ومع ذلك فإن الحد الأعلى المحلي يقوم بذلك، وتنتهي عملية التكرار حينما يكون الفرق بين قيم الدالة الهدفية عند متجهين x متتاليين أصغر من تفاوت موصف، ويصبح آخر متجه محسوب لـــ x هو التقريب النهائي لـــ x^*.

2- طريقة نيوتن- رافسون The Newton-Raphson Method: يتم اختيار متجها ابتدائيا x_0 كما في طريقة أقصى ميل صعود، تحدد المتجهات ... $x_1\ x_2\ x_3$ بالتكرار بواسطة:

$$x_{k+1} = x_k - (H_f|x_k)^{-1} \nabla f|x_k \quad \text{.....(3)}$$

وقاعدة الإيقاف هي نفسها كما في طريقة أقصى ميل صعود، وتقرب طريقة نيوتن-رافسون إلى الحد الأعلى المحلي إذا كانت H_f سالبة مؤكدة في بعض ϵ حول الحد الأعلى، وإذا كانت x_0 تقع في ϵ.

ملاحظة:

إذا كانت H_f سالبة مؤكدة، H_f^{-1} توجد وسالبة مؤكدة، إذا لم تختر x_0 صحيحة، فإن الطريقة يمكن أن تقرب إلى حد أدنى محلي أو قد لا تقرب على الإطلاق، وفي أي حالة تنتهي العملية التكرارية وتبدأ من جديد بتقريب أولي أفضل.

3- طريقة فلتشر-بوبل The Fletcher-Powell Method: هذه الطريقة ذات ثمانية خطوات، تبدأ باختيار متجه أولي $\hat{x}$، وتحديد التفاوت ϵ وإنشاء n×n مصفوفة G مساوية للمصفوفة الأحادية، فإن كلا من G $\hat{x}$ تعدل باستمرار حتى يكون الاختلاف بين قيمتين للدالة الهدفية أقل من ϵ، حيث تؤخذ القيمة الأخيرة من $\hat{x}$، كـ x^*.

- **الخطوة الأولى:** تقييم $\alpha = f(\hat{x})$، $B = \Delta f|\hat{x}$
- **الخطوة الثانية:** تحديد λ^* بحيث إن $f(\hat{X} + \lambda GB)$ تكون حدا أعلى، حيث $\lambda = \lambda^*$ ، ثم انشاء $D=\lambda^* GB$
- **الخطوة الثالثة:** جعل $\hat{X} + D$ كقيمة معدلة من $\hat{X}$.
- **الخطوة الرابعة:** حساب $\beta = f(\hat{x})$ للقيمة المعدلة من $\hat{X}$ إذا كانت $\beta - \alpha < \epsilon$، ثم الذهاب إلى الخطوة الخامسة، وإذا لم تكن كذلك يتم الذهاب إلى الخطوة السادسة.
- **الخطوة الخامسة**: انشاء $\hat{X} = X^*$ ، $f(x^*) = \beta$، ثم التوقف.
- **الخطوة السادسة:** تقييم $C = \Delta f|\hat{x}$ للمتجه المعدل $\hat{X}$، وانشاء $Y = B - C$
- **الخطوة السابعة:** حساب المصفوفات n×n

$$L = \left(\frac{1}{D^T Y}\right) DD^T \quad \text{و} \quad M = \left(\frac{-1}{Y^T GY}\right) GYY^T G$$

- **الخطوة الثامنة:** جعل G+L+M كقيمة معدلة في G وانشاء α مساوية القيمة الحالية من B، β مساوية القيمة الحالية من C، والرجوع إلى الخطوة الثانية.

4- بحث نمط هوك-جيف Hooke-Jeeves Pattern Search: هذه الطريقة هي طريقة بحث مباشرة، تستخدم التحركات الاستكشافية، والتي تحدد اتجاها مناسبا، وكذلك تحركات نمط، والتي تعجل البحث، تبدأ الطريقة باختيار متجه أولي $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]^\tau$ ، وخطوة حجمها h.

- **الخطوة الأولى:** تتم التحركات الاستكشافية حول B بالتشويش على عناصر B، وبالتالي بواسطة $\pm h$ وحدة، إذا أدى هذا التشويش إلى تحسين (زيادة) قيمة الدالة الهدفية بعد القيمة الحالية، فإن القيمة الابتدائية $f(B)$، وهي القيمة المشوشة لهذا العنصر تبقى كما هي، وإلا تحفظ القيمة الأصلية للعنصر، وبعد اختبار كل عنصر فإن المتجه الناتج يسمى C، إذا كان C=B، يتم الذهاب إلى الخطوة الثانية، وإلا إلى الخطوة الثالثة.

- **الخطوة الثانية:** B هو موقع الحد الأعلى إلى داخل التفاوت h إذا اختصرت h وأعيدت الخطوة الأولى، أو انتهى البحث عند $X^* = B$.

- **الخطوة الثالثة**: صناعة حركة نمط للمتجه الوقتي $T = 2C - B$ (الوصول إلى T بالتحرك من B إلى C والاستمرار حتى مسافة مساوية في نفس الاتجاه).

- **الخطوة الرابعة:** صناعة تحركات استكشافية حول T مماثلة للتحركات حول B الموضحة في الخطوة الأولى، ثم تسمية المتجه الناتج S، إذا كانت $S = T$، ثم الذهاب إلى الخطوة الخامسة، وإلا إلى الخطوة السادسة.

- **الخطوة الخامسة:** انشاء $B = C$، والرجوع إلى الخطوة الأولى.

- **الخطوة السادسة:** انشاء $C = S$، $B = C$، والرجوع إلى الخطوة الثالثة.

5- بحث النمط المعدل A Modified Pattern Search: ينتهي بحث هوك-جيف عندما لا يؤدي أي تشويش لعناصر B إلى تحسين في الدالة الهدفية، وفي بعض الحالات تحدث هذه النهاية قبل وقتها، ذلك أن هذه التشويشات لاثنين أو أكثر من العناصر في وقت واحد قد تؤدي إلى تحسين في الدالة الهدفية، ويمكن أن تتضمن الطريقة تشويشات آنية بتعديل الخطوة الثانية كما يلي:

- **الخطوة الثانية:** تنفيذ بحث موسع على سطح المكعب الزائد ذي المركز B باعتبار كل التشويشات الممكنة لعناصر B بواسطة kh وحدة، حيث أن: k =-1 0 1 لمتجه ذي عناصر n، يوجد $3^n - 1$ تشويشا للاعتبار، وبمجرد تحقيق التحسن، يتم إنهاء البحث الموسع، وانشاء المتجه المحسن مساويا B ، والرجوع إلى الخطوة الأولى، وإذا لم يتحقق أي تحسن، فتكون B هي موقع الحد الأعلى في داخل التفاوت h، إما تختصر h وتكرر الخطوة الأولى، أو ينتهي البحث عند $X^* = B$.

6- اختيار التقريب الأولى Choice Of An Initial Approximation: تبدأ كل طريقة عددية بتقريب أول إلى الحد الأعلى المطلوب، ويكون هذا التقريب في بعض الأحيان ظاهرا من النواحي الطبيعية

أو الهندسية للمسألة، وفي حالات أخرى يستخدم أحد مولدي الأرقام العشوائية لإيجاد قيم مختلفة لـــ x، ثـم تحسب $f(x)$ لكل قيمة مختارة عشوائيا لـــ x، وتؤخذ قيمة x التي تعطى أفضل قيمة للدالة الهدفية كتقريب أولى، وحتى طريقة العينات العشائية هذه تتضمن تخمينا أوليا لموقع أوليا لموقع الحد الأعلى، وعلى ذلك فإن الأعداد العشوائية يجب أن تراجع بحيث تقع في فترة ثابتة.

7- الدوال المحدبة Concave Functions: إن أي طريقة عددية لا يوجد ضمان بأنها ستكشف عن أعلى حد شامل، فقد تقترب من الحد الأعلى المحلى، أو أسوأ من ذلك، قد لا تقترب بـالمرة وتسـتثنى مـن ذلـك البرامج التي لها دوال هدفية محدبة.

تكون الدالة $f(x)$ مقعرة في منطقة مقعرة R إذا كان للمتجهين x_1 x_2 في R، ولكل قيم $0 \leq \alpha \leq 1$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \quad \text{.....(4)}$$

بالمقارنة مع العلاقة (3) تكون الدالة محدبة في R إذا كانت فقط قيمتها السلبية مقعرة فـي R قـد تكـون المنطقة المقعرة R محدودة أو غير محدودة.

نظريات:

- إذا كان للدالة $f(x)$ مشتقة جزئية ثانية في R، فإن $f(x)$ تكون محدبة في R إذا كانـت مصـفوفة هي H_f سالبة نصف مؤكدة لكل x في R .
- إذا كانت $f(x)$ محدبة في R، فإن أي حد محلى أعلى في R هو حد أعلى شامل في R.

هاتان النظريان تتضمنان أنه إذا كانت H_f سالبة نصف مؤكدة في أي مكان، فإن أي حد أعلى محلـى يؤدي إلى حل للبرنامج (1)، وإذا كانت H_f سالبة مؤكدة في أي مكان، فإن $f(x)$ تكون محدبـة بدقـة (في كل مكان)، ويكون حل البرنامج (1) وحيدا (عديم النظير).

IV. البرمجة غير الخطية- أمثلية متعدد المتغيرات ذو قيود : Nonlinear programming

Multivariable Optimization with Constraints

بمعرفة، $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ تكون الصيغة القياسية للبرامج غير الخطية، والتي تحتوي على متساويات قيود فقط هي:

تعظيم $z = (x)$

علما بأن: $g_1(x) = 0$

$g_2(x) = 0$ ..... (1)

.....

$g_m(x) = 0$

عند $m < n$ (عدد القيود أقل من عدد المتغيرات).

وتتحول برامج التصغير إلى برامج تعظيم بضرب الدالة الهدفية في (-1)، وتكون الصيغة القياسية للبرامج غير الخطية والتي تحتوي على متباينات للقيود فقط هي:

إما تعظيم $z = (x)$

علما بأن: $g_1(x) \leq 0$

$g_2(x) \leq 0$ .....(2)

.....

$g_p(x) \leq 0$

أو

تعظيم $z = (x)$

علما بأن: $g_1(x) \leq 0$

$g_2(x) \leq 0$ .....(3)

.....

$g_m(x) \leq 0$

عند $x \geq 0$

والصيغتان تكونان متكافئتين عند $m=p$ فإن (2) تصبح في داخل (3)، بتعويض $x = u - v$ عند $V \geq 0$ و $U \geq 0$، وعلى الوجه الآخر تكون (2) مثل (3) تماما في الحالة الخاصة $p = m + n$، $g_{m+1}(x) = -x_i$ حيث ($i=1,2,\ldots,n$) الصيغة (3) تكون مناسبة عندما لا تتطلب خطوات الحل أي متغيرات غير سالبة، في (1)، (2) أو (3)، وتكون f دالة غير خطية، ولكن بعض أو كل قيم g تكون خطية.

وتحل البرامج غير الخطية، والتي ليست في الصيغة القياسية إما بوضعها في الصيغة أو بتطوير طرق الحل المعطاة بأسفل للبرامج من الصيغة القياسية:

1- مضروبات لاجرانج Lagrange Multipliers: لحل البرنامج (1)، تكون أولا دالة لاجرانج:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_2, , \lambda_m) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(x) \quad \dots\dots\dots\dots (4)$$

حيث إن λ_i $(i=1,2,\dots\dots,m)$ تكون ثوابت (مجهولة) تسمى مضربات لاجرانج، ثم يحل النموذج ذا $n+m$ معادلة.

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,2, \dots \dots, n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (i = 1,2, \dots \dots, m) \quad \dots\dots\dots\dots (5)$$

إذا وجد حل للبرنامج (1)، فإنه يكون ضمن حلول النموذج (5)، على أساس أن كلا من $f(x)$، $g_i(x)$ عند $(i=1,2,\dots,m)$ لها جميعا مشتقات جزئية أولى متصلة، ومصفوفة جاكوب $m \; x \; n$

$$j = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right]$$

تكون من الرتبة m عند $x = x^*$

طريقة مضروبات لاجرانج تكافئ استخدام القيود لحذف عدد معين من المتغيرات -x من الدالة الهدفية، ثم حل مسألة التعظيم غير المقيدة في المتغيرات -x المتبقية.

2- طريقة نيوتن–رافسون Newton-Raphson Method: حيث أن:

$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_2, , \lambda_m) = L(z)$ غير خطية، فإنه عادة يكون من غير الممكن حل (5) حسابيا (تحليليا)، ومع ذلك وحيث إن حلول (5) هي النقاط الساكنة في L(z) وحيث تحدث النهايات العظمى والدنيا في L(z) بين هذه النقاط، فإنه من الممكن استخدام طريقة نيوتن –رافسون لتقريب النهاية اليمنى في L(z) بمعنى النهاية التي تناظر الحل الأمثل في (1)، وتطبيق هنا الصيغة التكرارية:

$$Z_{k+1} = Z_k - (H_L|z_k)^{-1} \nabla L/z_k \quad \dots\dots\dots\dots (6)$$

وهذا المدخل له قيمة محدودة، لأنه من الصعب جدا تحديد قيمة مناسبة لـــ Z_0. ولأي قيمة غير صحيحة فإن طريقة نيوتن-رافسون يمكن أن تشتت الحل أو تقترب من النهاية الخاطئة لـــ L(z)، ومن الممكن أيضا أن تتقارب الطريقة في حالة عدم وجود حل أمثل.

3- الدوال الجزائية Penalty Functions: كمدخل بديل لحل البرنامج (1) الذي يتضمن البرنامج غير المقيد:

$$z = f(x) - \sum_{i=1}^{m} p_i g_i^2(x) \quad \text{تعظيم} \quad \dots\dots\dots\dots (7)$$

حيث p_i >0 تكون ثوابت (يمكن اختيارها) تسمى بالأوزان الجزائية، ويكون حل البرنامج (7) هو نفسه حل البرنامج (1) عند كل قيمة $g_i(x) = 0$، وللقيم الكبيرة في P_i يكون لحل (7) كل قيمة $g_i(x)$ قريبة من الصفر لتجنب الآثار الجانبية على الدالة الهدفية من الحدود: $p_i g_i^2(x)$، وعندما كل قيمة $P_i \to +\infty$ وكل قيمة $g_i(x) \to 0$.

وعلميا لا يكمن تطبيق هذه الطريقة حسابيا إلا في حالات نادرة، وبدلا من ذلك يحل البرنامج (7) بالتكرار بواسطة بحيث النمط المعدل المذكور سابقا، وفي كل مرة إما بمجموعة جديدة من الأوزان الجزائية الزائدة، أو بتخفيض حجم خطوة، ويكون كل بحث نمطي بمجموعة أوزان جزائية محددة، وحجم خطوة معطى هو مرحلة من مراحل الحل، ويكون المتجه الأول للمرحلة المعنية هو المتجه النهائي للمرحلة السابقة لهذه المرحلة، وتختار الأوزان الجزائية للمرحلة الأولى صغيرة، غالبا 1/50=0,02، وغالبا ما يؤخذ حجم الخطوة بواحد.

ويتأثر التقريب في هذه الطريقة بمعدلات الزيادة في الأوزان الجزائية وتخفيض حجم الخطوة، والقرارات التي تحكم هذه المعدلات هي نوع من الفن أكثر منها علما.

4- شروط كون-توكر Kuhn-Tucher Conditions: لحل البرنامج (3) يكتب أولا شروط اللاسلبية، $-x_1 \le 0, -x_2 \le 0, \dots\dots -x_n \le 0$، بحيث تكون مجموعة القيود هي $m+n$ متباينة كل منها له علاقة أقل من أو يساوي، ثم تضاف المتغيرات المساعدة $x_{n+1}^2, x_{n+2}^2, \dots\dots, x_{2n+m}^2$ على التوالي للأطراف اليسرى من القيود، ثم تحول كل متباينة إلى متساوية، وهنا تضاف المتغيرات المساعدة كتربيعات الحدود لضمان عدم سلبيتها، ثم تكون دالة لاجرانج:

$$L = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(x) + x_{n+i}^2] - \sum_{i=m+1}^{m+n} \lambda_i [-x_i + x_{n+i}^2] \quad \text{(8)}.....$$

حيث λ_{n+m}.....λ_2 , λ_1 تكون مضروبات لاجرانج، وأخيرا يحل النموذج:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (j = 1,2, \dots\dots, 2n + m) \quad \text{(9)}.....$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (i = 1,2, \dots\dots, n + m) \quad \text{(10)}.....$$

$$\lambda_i \ge 0 \ (i = 1,2, \dots\dots, n + m) \quad \text{(11)}.....$$

ولكون (9) حتى (11) شروط كون-توكر للبرنامج (2) أو (3)، وتنتج المجموعتين (9) و(10) مباشرة من نظرية مضروبات لاجرانج، وتعرف المجموعة (11) باسم المؤهلات المقيدة، ومن بين حلول شروط كون-توكر يكون حل البرنامج (3) إذا كانت $f(x)$، وكل قيمة $g_i(x)$ لها مشتقة أولى متصلة.

5- طريقة الاتجاهات الممكنة Method Of Feasible Directions: هي طريقة ذات خمس خطوات لحل البرنامج (2)، وتطبيق هذه الطريقة عندما تكون المنطقة الممكنة لها قيم داخلية، ثم تتقارب من الحد الأعلى الشامل فقط عندما يكون التقريب الأولى قريبا من الحل، ولا توجد قيم داخلية للمنطقة الممكنة إذا كان اثنان من متباينات القيود ناتجين من التقارب في متساويات القيود:

- **الخطوة الأولى:** تحديد تقريبا أوليا ممكنا للحل، ويعرف بالحرف B.
- **الخطوة الثانية:** حل البرنامج الخطى التالي في المتغيرات: $d_1,d_2,\ldots\ldots d_{n+1}$

تعظيم $z = d_{n+1}$

علما بأن $-\frac{\partial f}{\partial x_1}\left|d_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\left|d_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial x_n}\right| d_n + d_{n+1} \leq 0$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\left|d_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|\left|d_2 + \cdots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right| d_n + k_1 d_{n+1} \leq -g_1(B) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\left|d_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|\left|d_2 + \cdots + \frac{\partial g_2}{\partial x_n}\right| d_n + k_2 d_{n+1} \leq -g_2(B)$$

……

$$\frac{\partial g_p}{\partial x_1}\left|d_1 - \frac{\partial g_p}{\partial x_2}\right|\left|d_2 + \cdots + \frac{\partial g_p}{\partial x_n}\right| d_n + k_p d_{n+1} \leq -g_p(B)$$

عند: $d_j \leq 1 \quad (j = 1,2,\ldots\ldots,n+1)$

وهنا $k_i (i = 1,2,\ldots,P)$ تكون صفرا إذا كانت $g_i(x)$ خطية، وتكون واحدا إذا كانت $g_i(x)$ غير خطية.

- **الخطوة الثالثة:** إذا كانت $d_{n+1} = 0$ فإن $x^* = B$ وإذا لم تكن كذلك، فيتم الذهاب إلى الخطوة الرابعة.
- **الخطوة الرابعة:** وضع $D = [d_1, d_2, \ldots\ldots d_n]^T$، وتحديد قيمة غير سالبة لـــ λ، والتي تعظم $f(B + \lambda D)$، بينما يتم الحفاظ على أن تكون $B + \lambda D$ ممكنة، وإطلاق على هذه القيمة λ^*.
- **الخطوة الخامسة:** تعريف $B = B + \lambda^* D$، ثم العودة إلى الخطوة الثانية.

V. تمارين محلولة

التمرين الأول:

1- استخدم بحث فترة الثلاث نقاط لتقريب الحد الأعلى في $f(x) = x(5\pi - x)$ في الفترة $[0 - 20]$ داخل $\epsilon = 1$.

2- أعد الحل باستخدام بحث فيبوناكس.

3- أعد الحل باستخدام بحث المتوسط الذهبي.

الحل:

1- باستخدام بحث فترة الثلاث نقاط:

حيث $f''(x) = -2 < 0$ فإن $f(x)$ تكون محدبة، وبالتالي أحادية النموذج في [0-20] لذلك يؤكد بحث فترة الثلاث نقط الاقتراب من الحد الأعلى الشامل.

- **المحاولة الأولى**: بقسمة [0-20] إلى أرباع نحصل على $x_3 = 15$، $x_2 = 10$ ، $x_1 = 5$ كثلاث نقاط داخلية، لذلك:

$$f(x_1) = x_1(5\pi - x_1) = 5(5\pi - 5) = 53{,}54$$
$$f(x_2) = x_2(5\pi - x_2) = 10(5\pi - 10) = 57{,}08$$
$$f(x_3) = x_3(5\pi - x_3) = 15(5\pi - 15) = 10{,}62$$

حيث x_2 هي النقطة الداخلية التي تعطى أكبر قيمة للدالة الهدفية، نأخذ الفترة [5-15] التي مركزها عند x_2 كفترة جديدة.

- **المحاولة الثانية:** بقسمة [5-15] إلى أرباع عند $x_5 = 12.5$، $x_2 = 10$، $x_4 = 7{,}5$ كنقاط داخلية. لذلك:

$$f(x_4) = x_4(5\pi - x_4) = 7{,}5(5\pi - 7{,}5) = 61{,}56$$
$$f(x_2) = 57{,}08 \text{ (كما في السابق)}$$
$$f(x_5) = x_5(5\pi - x_5) = 5(5\pi - 12{,}5) = 40{,}10$$

وحيث x_4 هي النقطة الداخلية المؤدية إلى أكبر قيمة $f(x)$، نأخذ الفترة [5.10] التي مركزها x_4 كفترة جديدة.

- **المحاولة الثالثة:** بقسمة [5-10] إلى أرباع عند $x_7 = 8{,}75$، $x_4 = 7{,}5$، $x_6 = 6{,}25$ كفترة جديدة. لذلك:

$$f(x_6) = (6,25)(5\pi - 6,25) = 59,11$$

$$f(x_4) = 61,56 \text{ (كما في السابق)}$$

$$f(x_7) = (8,75)(5\pi - 8,75) = 60,88$$

حيث تؤدي x_4 إلى أكبر قيمة لـــ $f(x)$ ، نأخذ الفترة [8,75-6,25] ، التي مركزها عند x_4، كفترة جديدة.

- **المحاولة الرابعة:** بقسمة [8,75-6,25] إلى أرباع، توجد $x_9 = 8,125$، $x_4 = 7,5$، $x_8 = 6,875$ كنقاط داخلية جديدة، لذلك:

$$f(x_8) = (6,875)(5\pi - 6,875) = 60,73$$

$$f(x_4) = 61,56 \text{ (كما في السابق)}$$

$$f(x_9) = (8,125)(5\pi - 8,125) = 61,61$$

والآن x_9 هي النقطة الداخلية التي تعطى أكبر قيمة للدالة الهدفية، نأخذ الفترة الأصغر عنـــد المركـــز x_9، وبالتحديد [8,75-7,5] كفترة جديدة للاعتبار، ومع ذلك تقع نقطة المنتصف لهذه الفترة داخل التفاوت المحدد مسبقا $\epsilon = 1$ من كل النقاط الأخرى في الفترة، ومن ثم تأخذ:

$$x^* = x_9 = 8,125$$

$$z^* = f(x_9) = 61,61 \text{ عند}$$

2- باستخدام بحث فيبوناكس:

النقطة الأولية: تحديد فيبوناكس الأول، بحيث أن $F_N(1) \geq 20 - 0$ هو $F_7 = 21$ نضع N=7،

$$\epsilon' = \frac{b-a}{F_N} = \frac{20-0}{21} = 0,95240$$

موقع النقطتين الأولين في البحث:

$$F_{6E'} = 13(0,9524) = 12,38 \text{ وحدة}$$

إلى الداخل من كل نقطة نهائية، وبالتالي:

$$x_1 = 0 + 12,38 = 12,38 \quad x_2 = 20 - 12,38 = 7,62$$

$$f(x_1) = (12,38)(5\pi - 12,38) = 41,20$$

$$f(x_2) = (7,62)(5\pi - 7,62) = 61,63$$

والتي ترسم في الشكل (5) الجزء (أ) باستخدام خاصية النموذج الأحادي، فإننا نستنتج أن الحد الأعلى يحدث إلى اليسار من 12,38، وتحصر الفترة إلى [12,38-0].

- **المحاولة الأولى:** تحديد فيبوناكس الأصغر التالي (F_6 كانت آخر قيمة مستخدمة) هو $F_5 = 8$ ، وبالتالي

توقع النقطة التالية في البحث:

$$F_{5\epsilon'} = (8)(0{,}9524) = 7{,}619 \text{ وحدة}$$

إلى الداخل من أجدد نقطة نهائية: 12.38 لذلك:

$$x_3 = 12{,}38 - 7{,}619 = 4{,}761$$

$$f(x_3) = (4{,}761)(5\pi - 4{,}761) = 52{,}12$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود في الشكل (5) الجزء (أ) يشكل الجزء (ب)، ومنه يستنتج أن الحد الأقصى يجب أن يحدث في الفترة الجديدة [12,38-4,761]

- **المحاولة الثانية:** تحديد فيبوناكس الأصغر التالي الآن هو $F_4 = 5$ لذلك:

$$x_4 = 4{,}761 + F_{4\epsilon'} = 4{,}761 + 5(0{,}9524) = 9{,}523$$

$$f(x_4) = (9{,}523)(5\pi - 9{,}523) = 58{,}90$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود في الشكل (5) الجزء (ب)، يتم الحصول على الشكل (5) الجزء (ج)، ومنه يستنتج أن الفترة الجديدة هي [9,523-4,761].

- **المحاولة الثالثة:** تحديد فيبوناكس الأصغر التالي هو $F_3 = 3'$ ومن ثم:

$$x_5 = 9{,}523 - 3(0{,}9523) = 6{,}666$$

$$f(x_5) = (6{,}666)(5\,\pi - 6{,}666) = 60{,}27$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود في الشكل (5) الجزء (ج) يتم الحصول على الشكل (5) الجزء (د)، وينتج من خاصية النموذج الأحادي أن الفترة الجديدة هي [9,523-6,666].

- **المحاولة الرابعة:** تحديد فيبوناكس الأصغر التالي الآن هو $F_2 = 2$ ومن ثم:

$$x_6 = 6{,}666 + 2(0{,}9524) = 8{,}571$$

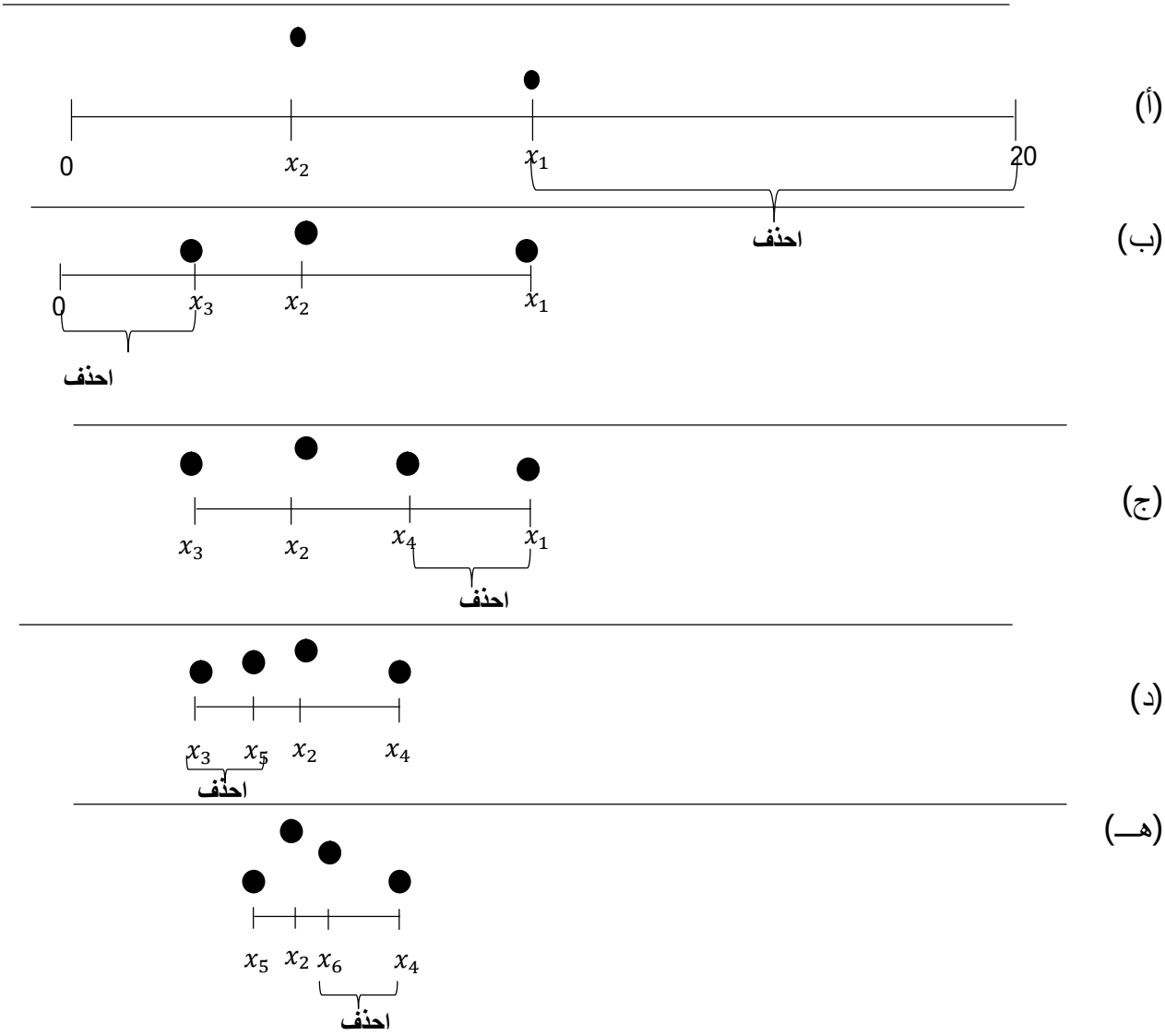
$$f(x_6) = (8{,}571)(5\,\pi - 8{,}571) = 61{,}17$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود في الشكل (5) الجزء (د) يتم الحصول على الشكل (5) الجزء (هـ)، ومنه يستنتج أن [8,571-6,666] هي الفترة الجديدة، ومع ذلك منتصف هذه النقطة يقع داخل $\epsilon = 1$ (في الحقيقة داخل $\epsilon' = 0{,}9524$) من كل نقطة أخرى في الفترة، (نظريا يجب أن تنطبق نقطة المنتصف مع x_2 والاختلاف البسيط الواضح ينتج من التقريب)، ولذلك يقبل x_2 كموقع الحد الأقصى، بمعنى:

$$x^* = x_2 = 7.62$$

$$z^* = f(x_2) = 61.63 \quad \text{عند}$$

الشكل (05)



3- استخدام بحث المتوسط الذهبي:

النقاط الأولية: طول الفترة الأولية هو L_1 = 20، لذلك توقع النقطتين الأوليين في البحث:

(0,6180)(20)= 12,36 وحدة

للداخل من كل نقطة نهائية، لذلك:

$$x_1 = 0 + 12{,}36 = 12{,}36 \quad x_2 = 20 - 12{,}36 = 7{,}64$$

$$f(x_1) = (12{,}36)(5\pi - 12{,}36) = 41{,}38$$

$$f(x_2) = (7{,}64)(5\pi - 7{,}64) = 61{,}64$$

والنقاط $(x_2, f(x_2))$، $(x_1,\ f(x_1))$ قريبة جدا من النقاط المبينة في الشكل (5) الجزء (أ)، وتنتج خاصية النموذج الأحادي أن الحد الأعلى يجب أن يحدث إلى اليسار من 12,36، ومن ثم تبقى [12,36-0] هي الفترة الجديدة.

- **المحاولة الأولى:** الفترة الجديدة طولها L_2 = 12,36، ولذلك فإن النقطة التالية في البحث تقع 0,6180L_2 وحدة إلى الداخل من أجدد نقطة نهائية، لذلك:

$$x_3 = 12{,}36 - (0{,}6180)(12{,}36) = 4{,}722$$

$$f(x_3) = (4{,}722)(5\pi - 4{,}722) = 51{,}88$$

وبإضافة هذه النقطة الجديدة يستعمل الشكل (5) الجزء (ب)، يتم الحصول على [12,36 -4,722] كفترة جديدة.

- **المحاولة الثانية:** L_3 = 12,36 − 4,722 = 7,638، لذلك:

$$x_4 = 4{,}722 + (0{,}6180)(7{,}638) = 9{,}442$$

$$f(x_4) = (9{,}442)(5\pi - 9{,}442) = 59{,}16$$

ويصبح الشكل كما في الشكبر (5) الجزء (ج)، ومنه يستنتج أن [7,442 -4,722] هي الفترة الجديدة.

- **المحاولة الثالثة:** L_4 = 9,442 − 4,722 = 4,720، لذلك:

$$x_5 = 9{,}442 - (0{,}6180)(4{,}720) = 6{,}525$$

$$f(x_5) = 6{,}525(5\pi - 6{,}525) = 59{,}92$$

ويصبح الشكل هو الشكل (5) الجزء (د) ، ومنه نستنتج أن [9,442-6,525] هي الفترة الجديدة.

- **المحاولة الرابعة:** L_5 = 9,442 − 6,525 = 2,917، ومن ثم:

$$x_6 = 6{,}525 + (0{,}6180)(2{,}917) = 8{,}328$$

$$f(x_6) = (8{,}328)(5\pi - 8{,}328) = 61{,}46$$

بهذه النقطة الجديدة يتم الوصول إلى الشكل(5) الجزء (هـ) وإيجاد أن [8,328-6,525] هي الفترة الجديدة.

يلاحظ أن طول الفترة الجديدة يقل عن 2ϵ = 2، ولكن النقطة العينة المحتواة x_2 لا تقع داخل ϵ لكل النقاط الأخرى في الفترة، لذلك فإن محاولة أخرى تكون مطلوبة.

- **المحاولة الخامسة:** L_6 = 8,328 − 6,525 = 1,803، لذلك:

$$x_7 = 8{,}328 - (0{,}6180) = 7{,}214$$

$$f(x_7) = (7{,}214)(5\pi - 7{,}214) = 61{,}28$$

هذه النقطة الجديدة تحدد $[x_7 - x_6]$=[7,214-8,328] كفترة جديدة، ومع ذلك فالنقطة الداخلية x_2 = 7,64 تكون داخل ϵ = 1 لكل النقاط الأخرى في الفترة، لذلك تأخذ كموقع الحد الأقصى، بمعنى:

$$x^* = x_2 = 7{,}64$$

$$z^* = f(x_2) = 61{,}64 \quad \text{عند}$$

التمرين الثاني:

استخدم طريقة ميل صعود في:

$$Z = -\sin x_1 x_2 + \cos(x_1 - x_2) \quad \text{تعظيم}$$

بتفاوت في حدود 0,05.

الحل:

هنا:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -x_1 \cos x_1 x_2 - \sin(x_1 - x_2) \\ -x_2 \cos x_1 x_2 - \sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

ببحث الأرقام العشوائية في المنطقة $x_2 \leq 1$ $x_1 \leq 1-$ نحصل على:

$X_0 = [-0{,}7548 \quad 0{,}5303]^T$ عند $f(x_0) = 0{,}6715$.

- **المحاولة الأولى:**

$$\nabla f|x_0 = \begin{bmatrix} -0{,}5303\cos[(-0{,}7548)(0{,}5303)] - \sin(-0{,}7548 - 0.5303) \\ 0{,}7548\cos[(-0{,}7548)(0{,}5303)] + \sin(-0{,}7548 - 0.5303) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4711 \\ -0{,}2643 \end{bmatrix}$$

$$x_0 + \nabla f|x_0 = \begin{bmatrix} -0{,}7548 \\ 0{,}5303 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0{,}4711 \\ -0{,}2643 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}7548 + 0{,}4711\lambda \\ 0{,}5303 - 0{,}2643\lambda \end{bmatrix}$$

$$f(x_0 + \nabla f|x_0) = -\sin[(-0{,}7548 + 0{,}4711\lambda)(0{,}5303 + 0{,}4711\lambda)] + \cos[(-0{,}7548 + 0{,}4711\lambda 0{,}5303 - 0{,}2643\lambda$$

=

باستخدام بحث المتوسط الذهبي على $[0 - 8]$ نحدد أن هذه الدالة λ لها حد أعلى عند $\lambda_0^* \approx 1{,}7$، لذلك:

$$x_1 = x_0 + \nabla f|x_0 = \begin{bmatrix} -0{,}7548 + 0{,}411(1{,}7) \\ 0{,}5303 - 0{,}2643(1{,}7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}04607 \\ 0{,}08099 \end{bmatrix}$$

عند $f(x_1) = 0{,}9957$ ، حيث أن:

$$f(x_1) - f(x_0) = 0{,}9957 - 0{,}6715 = 0{,}3242 > 0.05$$

مع الاستمرار في المحاولة.

- **المحاولة الثانية:**

$$\nabla f|x_1 = \begin{bmatrix} -0{,}08099\cos[(0{,}04607)(0{,}08099)] - \sin(0{,}04607 - 0{,}08099) \\ -0{,}04607\cos[(-0{,}04607)(0{,}08099)] + \sin(0{,}04607 - 0{,}08099) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}04608 \\ -0{,}08099 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + \nabla f|x_1 = \begin{bmatrix} 0{,}04607 - 0{,}04608\lambda \\ 0{,}08099 - 0{,}08098\lambda \end{bmatrix}$$

$$f(x_1 + \nabla f|x_1) = -\sin[(0.04607 - 0.04608\lambda)(0.08099 - 0.08098\lambda)] + \cos[(0.04607 + 0.04608\lambda) - (0.08099 - 0.08098\lambda) \quad]$$

$$= -\sin(0.003731 - 0.007463\lambda + 0.003732\lambda^2) + \cos(-0.03492 + 0.03490\lambda$$

باستخدام بحث الموسط الذهبي على [0.1] نحدد أن هذه الدالة λ لها حد أعلى عند $\lambda_0^* \approx 1.7$، لذلك:

$$x_2 = x_1 + \lambda_1^* \nabla f|x_1 = \begin{bmatrix} 0{,}04607 - 0{,}04608(1) \\ 0{,}08099 - 0{,}08098(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

عند $f(x_2) = 1{,}000$ ، وحيث أن:

$$f(x_2) - f(x_1) = 1{,}000 - 0{,}69957 = 0{,}0043 < 0{,}05$$

بأخذ: $Z^* = 1{,}000\,, x^* = x_2$

التمرين الثالث:

استخدم طريقة نيوتن-رافسون في:

تعظيم: $z = -(x_1 - \sqrt{5})^2 - \quad (x_2 - \pi)^2 - 10$

إلى داخل التفاوت 0,05.

الحل:

يحتاج إلى حل تقريبي أولي نحصل عليه بالعينات العشوائية للدالة الهدفية في المنطقة $-10 \le x_1, 10 \le x_2$، ونقاط العينة وقيم Z المناظرة لها تبين في الجدول الأسفل:

Z	x_2	x_1	Z	x_2	x_1
-219,4	-9,945	8,411	-144,0	-1,099	-8,537
-123,9	-5,709	8,202	-144,2	-8,005	-0,9198
-241,3	-6,914	-9,173	-90,61	-2,524	9,201
-169,2	8,163	-9,337	-78,59	7,546	9,250
-84,48	-0,0210	-5,794	**-36,58**	5,891	6,597

من الجدول السابق يأخذ التقريب الأول $x_0 = [6{,}597 - 5{,}891]^T$ عند $f(x_0) = -36{,}58$ و المتجه المتدرج، مصفوفة هسى، ومقلوب مصفوفة هسى لهذه الدالة الهدفية على التوالي هي:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -2(x_1 - \sqrt{5}) \\ -2(x_2 - \pi) \end{bmatrix}, H_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, H_f^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

لكل قيم x_1, x_2.

- **المحاولة الأولى:**

$$\nabla f|x_0 = \begin{bmatrix} -2(6{,}597 - \sqrt{5}) \\ -2(5{,}891 - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8{,}722 \\ -5{,}499 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{\left(\frac{H_f}{x_0}\right)^{-1} \nabla f}{x_0}$$

$$= \begin{bmatrix} 6{,}597 \\ 5{,}891 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8{,}722 \\ -5{,}499 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}236 \\ 3{,}142 \end{bmatrix}$$

عند $f(x_1) = -10{,}00$، حيث أن:

$$f(x_1) - f(x_0) = -10{,}00 - (-36{,}58) = 26{,}58 > 0{,}05$$

مع الاستمرار في المحاولة.

- **المحاولة الثانية:**

$$\nabla f|x_1 = \begin{bmatrix} -2(2{,}236 - \sqrt{5}) \\ -2(3{,}142 - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0001 \\ 0{,}0008 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_1 - \left(H_f|x_1\right)^{-1} \nabla f|x_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}236 \\ 3{,}142 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}0001 \\ 0{,}0008 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}236 \\ 3{,}142 \end{bmatrix}$$

عند $f(x_2) = -10.00$ وحيث أن: $f(x_2) - f(x_1) = 0 < 0.05$ ، مع أخذ $X^* = X_2 = [2{,}236 - 3{,}142]^T$ عند: $Z^* = f(x_2) = -10{,}00$

التمرين الرابع:

حل المسألة التالية حتى أقرب 0,25 كم بطريقة فلتشر –بويل:

تخفيض $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2} + \sqrt{(x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2}$

الحل:

المسألة مكافئة لبرنامج التعظيم بالدالة الهدفية:

$$f(x) = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{(x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2} - \sqrt{(x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2}$$

والمتجه المتدرج:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - \frac{x_1-300}{\sqrt{(x_1-300)^2+(x_2-400)^2}} - \frac{x_1-700}{\sqrt{(x_1-700)^2+(x_2-300)^2}} \\ -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - \frac{x_2-400}{\sqrt{(x_1-300)^2+(x_2-400)^2}} - \frac{x_2-300}{\sqrt{(x_1-700)^2+(x_2-300)^2}} \end{bmatrix}$$

لبدء طريقة فلتشر-بويل ننشئ $\epsilon = 0{,}25$ و $G = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ واختيار $\hat{x} = [400 - 200]^T$

- **الخطوة الأولى:**

$$\alpha = f(\hat{x}) = f(400 - 200) = -\sqrt{(400)^2 + (200)^2} - \sqrt{(100)^2 + (-200)^2} - \sqrt{(-300)^2 + (-100)^2} = -987.05$$

$$B = \nabla f|\hat{x} = \begin{bmatrix}-0.39296\\ 0.76344\end{bmatrix}$$

- **الخطوة الثانية:**

$$f(\hat{x} + \lambda GB) = f\left(\begin{bmatrix}400\\200\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0{,}39296\\ 0{,}76344\end{bmatrix}\right) = f(\begin{bmatrix}400 - 0{,}39296\lambda\\ 200 + 0{,}76344\lambda\end{bmatrix})$$

$$=$$

$$-\sqrt{(400 - 0{,}39296\lambda)^2 + (200 + 0{,}76344\lambda)^2} - \sqrt{(100 - 0{,}39296\lambda)^2 + (-200 + 0{,}76344\lambda)^2} - \sqrt{(-300 - 0{,}39296\lambda)^2 + (-100 + 0{,}76344\lambda)^2}$$

ويعمل بحث فترة الثلاث نقاط في $[0 - 425]$ وتحديد $\lambda^* \approx 212.5$ ، لذلك:

- **الخطوة الثالثة:**

$$D = \lambda^* GB = (212{,}5)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0{,}39296\\ 0{,}76344\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-83{,}504\\ 162{,}23\end{bmatrix}$$

$$X + D = \begin{bmatrix}400\\200\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-83{,}504\\ 162{,}23\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-83{,}504\\ 162{,}23\end{bmatrix}$$

التي يمكن أن نأخذها كقيمة معدلة.

- **الخطوة الرابعة:**

$$\beta = f(\hat{x}) = f(316{,}50 - 362{,}23) = -910{,}76$$

$$\beta - \alpha = -910{,}76 - (-987{,}05) = 76{,}29 > 0{,}05$$

بما **أن** $\beta - \alpha > \epsilon$ فيتم الذهاب مباشرة إلى الخطوة السادسة.

- **الخطوة السادسة:**

$$C = \nabla f|x = \begin{bmatrix}-0{,}071207\\ 0{,}0031594\end{bmatrix}$$

$$Y = B - C = \begin{bmatrix}-0{,}39296\\ 0{,}76344\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-0{,}071207\\ 0{,}0031594\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}32175\\ 0{,}76028\end{bmatrix}$$

- **الخطوة السابعة:**

$$D^T Y = [-83{,}504 - 162{,}23]\begin{bmatrix}-0{,}32175\\ 0{,}76028\end{bmatrix} = 150{,}21$$

$$L = \frac{1}{150,21} DD^T = \frac{1}{150,21} \begin{bmatrix} -83,504 \\ 162,23 \end{bmatrix} [-83,504 \quad -162,23]$$

$$= \frac{1}{150,21} \begin{bmatrix} 6972,9 & -13547 \\ -13547 & 26319 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46,421 & -90,187 \\ -90,187 & 175,21 \end{bmatrix}$$

$$Y^T GY = [(-0,32175) \quad -0,76028] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,32175 \\ 0,76028 \end{bmatrix} = 0,68155$$

$$M = \frac{-1}{0,68155} GYY^T G$$

$$= \frac{-1}{0,68155} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,32175 \\ 0,76028 \end{bmatrix} [-0,32175 \quad -0,76028] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{0,68155} \begin{bmatrix} 0,10352 & -0,24462 \\ -0,24462 & 0,57803 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,15189 & 0,35892 \\ 0,35892 & -0,84811 \end{bmatrix}$$

- **الخطوة الثامنة:**

$$G + L + M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 46,412 & -90,187 \\ -90,187 & 175,21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.151189 & 0.35892 \\ 0.35892 & -0.84811 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 47,269 & -89,828 \\ -89.828 & 175,36 \end{bmatrix}$$

$B = \begin{bmatrix} -0,071207 \\ 0,0031594 \end{bmatrix}$ و $\alpha = -910,76$ التي تأخذ كقيمة G المعدلة وتعدل أيضا

تعاد الخطوات السابقة ابتداءا من الخطوة الثانية.

- **الخطوة الثانية:**

$$f(\hat{x} + \lambda GB) = f\left(\begin{bmatrix} 316,50 \\ 362,23 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 47,269 & -89,828 \\ -89,828 & 175,36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,071207 \\ 0,0031594 \end{bmatrix}\right)$$

$$= f\left(\begin{bmatrix} 316,50 - 3,6497\lambda \\ 362,23 + 6,9504\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$=$$

$$-\sqrt{(316,50 - 3,6497\lambda)^2 + (362,23 + 6,9504\lambda)^2} -$$

$$\sqrt{(16,50 - 3,6497\lambda)^2 + (-37,77 + 6,9504\lambda)^2} -$$

$$\sqrt{(383,50 - 3,6497\lambda)^2 + (62,23 + 6,9504\lambda)^2}$$

وبعمل بحث فترة الثلاث نقاط في [0,10] يحدد $\lambda^* \approx 1.25$ ، لذلك:

$$D = \lambda^* GB = (1.25) \begin{bmatrix} 47,269 & -89,828 \\ -89,828 & 175,36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,071207 \\ 0,0031594 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,5621 \\ 8,6880 \end{bmatrix}$$

- **الخطوة الثالثة:**

$$\hat{X} + D = \begin{bmatrix} 316,50 \\ 362,23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4,5621 \\ 8,6880 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 311,94 \\ 370,92 \end{bmatrix}$$

التي تأخذ كقيمة $\hat{x}$ المعدلة.

- **الخطوة الرابعة:**

$$\beta = f(\hat{x}) = f(311{,}94 - 370{,}92) = -910{,}58$$
$$\beta - \alpha = -910.58 — 910{,}58 = 0{,}18 < 0{,}25$$

- **الخطوة الخامسة:**

$$X^* = \hat{X} = \begin{bmatrix} 311{,}94 \\ 370{,}92 \end{bmatrix} \quad and \quad f(X^*) = \beta = -910.58$$

وتحل هذه المسألة بـــ $x_2^* = 370{,}92$, $x_1^* = 311{,}94$ عند $Z^* = +910{,}58$

التمرين الخامس:

استخدم طريقة مضروبات لاجرانج في:

تخفيض $z = x_1 + x_2 + x_3$

علما بأن $x_1^2 + x_2 = 3$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7$

الحل:

يكافئ هذا البرنامج التخفيض غير المقيد لـــــ

$$z = 1/2(x_1^2 + x_1 + 4)$$

والذي يكون من الواضح أن له حلا، ومن الممكن تطبيق طريقة مضروبات لاجرانج على البرنامج الأصلي القياسي:

تعظيم $z = -x_1 - x_2 - x_3$

علما بأن: $x_1^2 + x_2 - 3 = 0$ ..... (1)

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0$

وهنا $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_2 - x_3$ ، متغيرات $n=3$ قيدان $m=2$

$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 3$ $g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7$

وتصبح دالة لاجرانج:

$$L = (-x_1 - x_2 - x_3) - \lambda_1(x_1^2 + x_2 - 3) - \lambda_2(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7)$$

ويصبح النموذج (5) (المذكور في طريقة مضروبات لاجرانج سابقا) هو:

(2) ..... $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - 2x_1\lambda_1 - \lambda_2 = 0$

(3) ..... $\frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$

(4)..... $\frac{\partial L}{\partial x_3} = -1 - 2\lambda_2 = 0$

(5)..... $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1^2 + x_2 - 3) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7) = 0 \quad \text{.....(6)}$$

وبحل على التوالي (4) في λ_2 ، (3) في λ_1 ، (2) في x_1، (5) في x_2، (6) في x_3، يتم الحصول على الحل الوحيد:

$$\lambda_2 = -0{,}5, \quad \lambda_2 = -0{,}5, \quad x_1 = -0{,}5, \quad x_2 = -2{,}75, \; x_3 = -0{,}375$$

عند $z = -x_1 - x_2 - x_3 = -(0{,}5) - 2{,}75 - (-0{,}375) = 1{,}875$

وحيث أن المشتقات الجزئية الأولى لـ $f(x_1, x_2, x_3), \; g_1(x_1, x_2, x_3) \; , g_{21}(x_1, x_2, x_3)$ كل متصلة، وحيث أن:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

من الرتبة 2 في أي مكان (العمودان الأخيران مستقلان خطيا في كل مكان)، فإن أي من $x_1 = -0{,}5$ $x_3 = -0{,}375, \; x_2 = -2{,}75,$ تكون حلا أمثل للبرامج (1)، أو لا يوجد حل أمثل، وبالتحقق من النقاط الممكنة في المنطقة حول (-0,5⁄2,75⁄-0,375) نجد أن هذه النقطة هي في الحقيقة موقع الحد الأعلى (الشامل) للبرنامج (1)، لذلك فإنه يكون موقع الحد الأدنى الشامل للبرنامج الأصلي عند $Z^* = -(-1{,}875) = 1{,}875$ أي:

$$z^* = -(-1{,}875) = 1{,}875$$

التمرين السادس:

استخدم طريقة نيوتن-رافسون في

تعظيم $z = 2x_1 + x_1x_2 + 3x_2$

علما بأن $x_1^2 + x_2 = 3$

الحل:

هنا $L = (2x_1 + x_1x_2 + 3x_2) - \lambda_1(x_1^2 + x_2 - 3)$

لذلك $\nabla L = \begin{bmatrix} 2 + x_2 - 2\lambda_1 x_1 \\ x_1 + 3 - \lambda_1 \\ -x_1^2 - x_2 + 3 \end{bmatrix} \quad H_L = \begin{bmatrix} -2\lambda_1 & 1 & -2x_1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2x_1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

يؤخذ اختياريا $Z_0 = [1,1,1]^T$ ، ويحسب :

- **المحاولة الأولى:**

$$\nabla L|Z_0 = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} \quad H_L|Z_0 = \begin{bmatrix}-2 & 1 & -2\\1 & 0 & -1\\-2 & -1 & 0\end{bmatrix} \quad (H_L|Z_0)^{-1} = 1/6\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\2 & -4 & -4\\-1 & -4 & -1\end{bmatrix}$$

$$Z_1 = Z_0 - (H_L|Z_0)^{-1}\nabla L|Z_0 = \left[\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right]^T$$

- **المحاولة الثانية:**

$$\nabla L|Z_1 = \begin{bmatrix}\frac{28}{9}\\0\\-\frac{4}{9}\end{bmatrix} \quad H_L|Z_1 = 1/3\begin{bmatrix}-20 & 3 & -2\\3 & 0 & -3\\-2 & -3 & 0\end{bmatrix} \quad (H_L|Z_1)^{-1} = 1/72\begin{bmatrix}-9 & 6 & -9\\6 & -4 & -66\\-9 & -66 & -9\end{bmatrix}$$

$$Z_2 = Z_1 - (H_L|Z_1)^{-1}\nabla L|Z_1 = \left[\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right]^T$$

وبالاستمرار لمحاولتين تاليتين يتم الحصول على:

$$Z_3 = [0{,}6333 \;/\; 2{,}6 \;/\; 3{,}633]^T$$

$$Z_4 = [0{,}6330 \;/\; 2{,}599 \;/\; 3{,}633]^T$$

ولما كانت عناصر Z استقرت لثلاثة أرقام مؤكدة، فيؤخذ:

$Z^* = 2x_1^* + x_i^* x_2^* + 3x_2^* = 10{,}7$ عند $x_1^* = 0.633,\ x_2^* = 2.60\ ,\ \lambda_1^* = 3.63$

بالتعبير عن قيمة Z كدالة (مكعبة) في x_2 فقط، فإنه من السهل معرفة أنه في هذه الحالة الخاصة اقتربت طريقة نيوتن –رافسون من الحد الأعلى المحلي.

التمرين السابع:

استخدم مدخل الدالة الجزائية في:

تخفيض: $z = (x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 + 1$

علما بأن $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 16$

الحل:

بوضع هذا البرنامج في الصيغة القياسية، يكون:

تعظيم: $z = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 + 1$

علما بأن $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 16 = 0$ ..... (1)

للبرنامج (1) يصبح:

تعظيم: $z = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - p_1(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 16)^2$ .....(2)

- **المرحلة الأولى :** يوضع $P_1 = 0{,}02$ في (2)، ويعتبر البرنامج:

تعظيم: $z = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - 0{,}02(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 16)^2$ .....(3)

يؤخذ باختيار $[0,0,0]^T$ كمتجه أولى، ونضع h=1 ، ويطبق بحث النمط على البرنامج (3)، فتكون النتيجة بعد 78 تقييم دوال هي $[1,1,1]^T$ عند:

$$g_1(1,1,1) = -13 \quad \text{و} \quad f(1,1,1) = -1$$

- **المرحلة الثانية :** حيث أن: $g_1(1,1,1) = -13 \neq 0$ ، فإن القيد في البرنامج (1) لا يتحقق، ولتحسين هذا الموقف يتم زيادة قيمة P_1 في (2) إلى 0,2 ، وبعتبر البرنامج:

تعظيم : $z = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - 0{,}02(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 16)^2$

بأخذ $[1,1,1]^T$ من المرحلة الأولى كتقريب أولي، يطبق بحث النمط على (4)، ويتم الحفاظ على h=1 تظل النتيجة $[1,1,1]^T$، مما يدل على أنه لا يمكن أن يتحقق القيد بالأعداد الصحيحة.

- **المرحلة الثالثة:** حيث إن زيادة P_1 لا تحسن الحل الحالي، يتم الرجوع إلى البرنامج (3)، وتخفض h إلى 0,1، وعمل بحث نمط جديد مرة أخرى باستخدام $[1,1,1]^T$ كتقريب أولى، وتكون النتيجة:

عند $g_1(1.5,1.5,1) = 0.1875$ و $f(1.5,1.5,1) = -1$

المرحلة	P_1	H	المتجه النهائي x			$f(x)$	$g_1(x)$
			x_1	x_2	x_3		
1	0,02	1	1	1	1	-1	-13
2	0,2	1	1	1	1	-1	-13
3	0,02	0,1	1,5	1,5	1	-1	0,1875
4	0,2	0,1	1,5	1,5	1	-1	0,1875
5	0,02	0,01	1,49	15	1	-1,000	-0,0623
6	0,2	0,01	1,49	15	1,01	-1,000	-0,0113
7	0,2	0,001	1,496	1,496	1,002	-1,000	-0,0039
8	2	0,001	1,496	1,496	1,003	-1,000	0,0012
9	20	0,001	1,496	1,496	1,003	-1,000	0,0012

بالاستمرار في هذه الطريقة نكمل الجدول السابق، وباستخدام نتائج المرحلة التاسعة، نستنتج أن: $x_3^* = 1{,}496$, $x_2^* = 1{,}496$, $x_3^* = 1{,}003$ عند $z^* = +1{,}000$، وهذا يقرب الحل الأمثل إلى برنامج التخفيض الأصلي.

وبالتفتيش يكون الحل الصحيح هو

$$x_1^* = x_2^* = \left(\frac{15}{2}\right)^{1/5} = 1{,}4963 \quad x_3^* = 1$$

عند $z^* = 1$ ، وبهذا يؤدي مدخل الدالة الجزائية إلى أربعة أرقام مؤكدة، وهذه نتيجة جيدة.

التمرين الثامن:

حل البرنامج التالي باستخدام شروط كون-توكر:

تعظيم : $Z = x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 - 2x_1 + 10x_2 + 5x_3$

علما بأن: $x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$

كل المتغيرات غير سالبة

الحل:

نبدأ أولا بالتحويل إلى النموذج (3)، ثم ندخل مربعات المتغيرات المساعدة، فنحصل على

تخفيض: $Z = -x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 5x_3$

علما بأن :

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 + 4 + x_4^2 = 0$$
$$-x_1 + x_5^2 = 0$$
$$-x_2 + x_6^2 = 0$$
$$-x_3 + x_7^2 = 0$$

بهذا البرنامج تكون الدالة لاجرانج هي:

$$L = -x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 5x_3$$
$$-\lambda_1(-x_1 - 2x_2 - x_3 + 4 + x_4^2) - \lambda_2(-x_1 + x_5^2) - \lambda_3(-x_2 + x_6^2) - \lambda_4(-x_3 + x_7^2)$$

وبأخذ المشتقات نحصل على:

(1)..... $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

(2)..... $\frac{\partial L}{\partial x_2} = -10x_2 + 4x_1 + 12x_3 - 10 + 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0$

(3)..... $\frac{\partial L}{\partial x_3} = -20x_3 - 6x_1 + 12x_2 - 5 + \lambda_1 + \lambda_4 = 0$

(4)..... $\frac{\partial L}{\partial x_4} = -2\lambda_1 x_4 = 0$

(5)..... $\frac{\partial L}{\partial x_5} = -2\lambda_2 x_5 = 0$

(6)..... $\frac{\partial L}{\partial x_6} = -2\lambda_3 x_6 = 0$

(7)..... $\frac{\partial L}{\partial x_7} = -2\lambda_4 x_7 = 0$

(8)..... $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4^2 - 4 = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 - x_5^2 = 0 \quad \text{.....(9)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = x_2 - x_6^2 = 0 \quad \text{.....(10)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = x_3 - x_7^2 = 0 \quad \text{.....(11)}$$

يمكن تبسيط المعادلات، من خلال تعويض: $S_1 = x_4^2$

المعادلات من (4) إلى (7) تتضمن على التوالي أن إما x_4 أو λ_1، إما x_5 أو λ_2، إما x_6 أو λ_3، إما x_7 أو λ_4 تساوي صفرا، ولكن من (9) حتى (12) تكون x_4, x_5, x_6, x_7 صفرية إذا كانت فقط S_1, x_1, x_2, x_3 صفرية على التوالي، لذلك فإن المعادلات من (4) حتى (7)، من (9) حتى (12) تكون مكافئه للنموذج:

$$\begin{gathered} \lambda_1 S_1 = 0 \\ \lambda_2 x_1 = 0 \quad \text{.....(13)} \\ \lambda_3 x_2 = 0 \\ \lambda_4 x_3 = 0 \end{gathered}$$

ويوجد 16 حلا لهذا النموذج.

أحد هذه الحلول هو $S_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = x_3 = 0$، وبالتعويض بهذه القيم في (8)، (1)، (2)، (3) والتبسيط، نحصل على النموذج الخطي:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + \lambda_1 = -2 \\ 4x_1 - 10x_2 + 2\lambda_1 = 10 \\ -6x_1 + 12x_2 + \lambda_1 + \lambda_4 = 5 \end{gathered}$$

الذي له الحل الوحيد $\lambda_2 = 14{,}53,\ \lambda_1 = 1{,}764,\ x_2 = 0{,}5294,\ x_1 = 2{,}941$، وهذه النتائج مسجلة في الصف 10 من الجدول التالي (الأرقام الثقيلة في الجدول تناظر حلول (13)).

كحل أخر لـــــ (13) هو $S_1 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ، بالتعويض بهذه القيم في (8)، (1)، (2)، (3) والتبسيط، نحصل على النموذج الخطي:

$$\begin{gathered} 0 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 10 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 5 \end{gathered}$$

الذي ليس له أي حل، كما هو مبين في الصف 16 في الجدول التـــالي، والاحتمـــالات الأخـــرى تعامـــل بالمثل، وتبين النتائج في الجدول التالي.

الصف الوحيد في الجدول الذي فيه مدخلات لاسلبية لكل المتغيرات، كما هو مطلوب لشرط كون-توكر، هو الصف 10. والآن حيث أن $Z = f(x)$ ، و $g_1(x) = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 4$

لها مشتقات أولى جزئية متصلة، فإن أحد شروط كون-كوتر يجب أن تعكـــس الحـــل الأمثـــل لبرنـــامج التعظـــــيم، ولكـــــن شـــــروط كـــــون-تـــــوكر هنـــــا لهـــــا حـــــل وحيـــــد، وبالتـــــالي: $x_3^* = 0$ $x_2^* = 0{,}5294$, $x_1^* = 2{,}941$, تعطي $Z^* = 3{,}235$ لبرنامج التخفيض الأصلي.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	x_1	x_2	x_3	S_1
0	0	0	0	11.5	-3	-5.5	-4
0	0	0	11	-5	-3	0	-15
0	0	6	0	17.5	0	-5.5	-4
0	0	6	11	1	0	0	-3
0	-1.643	0	0	0	-4.643	-3.036	-16.32
0	2	0	17	0	1-	0	-2
0	-3.5	13	0	0	0	-0.25	-4.25
0	-2	10	5	0	0	0	-4
0.3809	0	0	0	14.36	-2.238	-5.881	0
1.764	0	0	14.53	2.941	0.5294	0	0
-3.2	0	18.8	0	6.3	0	-2.3	0
6	0	-8	11	4	0	0	0
6.623	-8.738	0	0	0	1.507	0.9855	0
15	-25	0	-34	0	2	0	0
85	-63	-208	0	0	0	4	0
.....	.....	.....	.....	0	0	0	0

التمرين التاسع:

استخدم طريقة الاتجاهات الممكنة في:

$$Z = x_1 + x_2 \quad \text{تعظيم:}$$

$$x_2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad \text{علما بأن:}$$

كل المتغيرات غير سالبة

الحل:

نضع البرنامج السابق في الصيغة القياسية، ويكون البرنامج هو:

$$Z = x_1 + x_2 \quad \text{تعظيم:}$$

$$x_2x_1 - 2x_2 - 3 \leq 0 \quad \text{علما بأن:}$$

$$3x_1 + 2x_2 - 24 \leq 0$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

وهنا $f(x) = x_1 + x_2,\ g_1(x) = x_2x_1 - 2x_2 - 3,\ g_2(x) = 3x_2 + 2x_2 - 24,$

$$g_3(x) = -x_1, \quad g_4(x) = -x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = x_1 - 2$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 3 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 2$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial x_1} = -1 \qquad \frac{\partial g_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial g_4}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial g_4}{\partial x_2} = -1$$

وأكثر من ذلك $g_1(x)$ تكون غير خطية، بينما $g_2(x),\ g_3(x)\ ,\ g_4(x)$ تكون كلها خطية، لذلك

$$k_1 = 1, \quad k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

يتم مواصلة الحل:

- **الخطوة الأولى:** اختياريا يتم إعطاء B قيمة أولية هي $[1,1]^T$، والتي تكون ممكنة.
- **الخطوة الثانية:** عند هذه القيمة لـــ B يصبح البرنامج:

$$z = d_3 \quad \text{تعظيم:}$$

$$-d_1 - d_2 + d_3 \leq 0 \quad \text{علما بأن:}$$

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 + d_3 &\le 4 \\ 3d_1 + 2d_2 &\le 19 \\ -d_1 &\le 1 \quad \text{عند} \\ -d_2 &\le 1 \\ d_1 &\le 1 \\ d_2 &\le 1 \\ d_3 &\le 0 \end{aligned}$$

وحله هو $d_1 = 1, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 1$

- **الخطوة الثالثة:** $d_3 = 1 \neq 0$
- **الخطوة الرابعة:** $D = [1,0]^T$ حيث أن:

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = f(1+\lambda, 1) = 2 + \lambda$$

والتي تصبح كبيرة عندما تؤول λ إلى∞، وللحفاظ على $[1+\lambda, 1]^T$ ممكنة، مع ذلك لا يمكن أن تظل λ أكبر من 4 إذا تحقق القيد الأول في البرنامج (1)، وليست أكبر من 19/3 إذا تحقق القيد الثاني، لذلك $\lambda^* = 4$

- **الخطوة الخامسة:** $B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$

يتم إعادة الخطوات السابقة ابتداءا من الخطوة الثانية:

- **الخطوة الثانية:** بهذه الـــ B المعدلة يصبح البرنامج هو:

تعظيم: $Z = d_3$

علما بأن:

$$\begin{aligned} -d_1 - d_2 + d_3 &\le 0 \\ d_1 + 3d_2 + d_3 &\le 0 \\ 3d_1 + 2d_2 &\le 7 \\ -d_1 &\le 5 \quad \text{عند} \\ -d_2 &\le 1 \\ d_1 &\le 1 \\ d_2 &\le 1 \end{aligned}$$

وحله هو $d_1 = 1, \quad d_2 = -\frac{1}{2}, \quad d_3 = 1/2$

- **الخطوة الثالثة:** $d_3 = \frac{1}{2} \neq 0$
- **الخطوة الرابعة:** إذا: $D = [1, -1/2]^T$

$$f\left(\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1\\-1/2\end{bmatrix}\right) = f(5+\lambda, 1-1/2\lambda) = 6 + 1/2\lambda$$

والتي تصبح كبيرة عندما تؤول λ إلى ∞ . وللحفاظ على $[5+\lambda, 1-1/2\lambda]^T$ ممكنة، مع ذلك λ لا يمكن أن تكون أكبر من 3,5 إذا تحقق القيد الثاني في البرنامج (1)، وليست أكبر من 2 إذا تحقق قيد اللاسلبية في x_2 (ويتحقق القيدان الآخران في البرنامج (1) لأي اختيار لا سلبي لـــ λ لذلك: $\lambda^* = 2$

- **الخطوة الخامسة:** $B = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\-1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}$

x_1	x_2	d_1	d_2	d_3	λ^*
1	1	1	0	1	4
5	1	1	-1/2	½	2
7	0	1	0	1	1
8	0	-2/3	1	1/3	0,31373
7,64575	0,531373	0	0	0	……

بالاستمرار في هذه الطريقة نكمل الجدول السابق، ويتبع ذلك أن $x_2^* = 0{,}531373$,$x_1^* = 7{,}64575$

عند $Z^* = f(x_1^*, x_2^*) = 7{,}64575 + 0{,}531373 = 8{,}17712$

VI. تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

أوجد الأمثلية المحلية والشاملة لـــ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$ فـــي [-1,5] (c) ،[1,4] (b)، [0,3] (a).

التمرين الثاني:

أوجد كل الأمثلية المحلية والشاملة لـــ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ في (أ) [0,3]، (ب) [0,2]، (ج) [0, ∞].

التمرين الثالث:

أوجد كل الأمثلية المحلية والشاملة لـــ $f(x) = x - x^{-1}$ في (أ)(0,∞)، (ب) (0,-∞)، (ج) [5,10] (ملاحظة: في الأجزاء (أ)، (ب) x=0 تعامل كنقطة نهائية غير محددة).

التمرين الرابع:

بين أن $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$ هي محدبة بالتحديد فـــي (2، ∞-) ومقعـــرة بالتحديـــد فـــي (2، ∞).

التمرين الخامس:

حدد الفترات التي تكون فيها $f(x) = x - 4x^{-1}$ محدبة أو مقعرة.

التمرين السادس:

استخدم بحث الفترة ذات الثلاث نقط للتقريب إلى الداخل $\epsilon = 0.1$ موقع الحد الأدنى الشامل في [2-0]، في الدالة في التمرين الخامس.

(ملاحظة: استمر كما لو كانت الفترة [2-0])، ثم أعد حل المسألة باستخدام بحث فيبوناكس).

التمرين السابع:

1- قرب موقع الحد الأعلى الشامل في $[0, \pi]$ لـ $f(x) = x^2 \sin x$ باستخدام بحث الثلاث نقط للفترة غير المحددة بخمسة تقييمات للدوال (بمعنى بحث الخمس نقاط)، ما هي جودة هذا التقريب؟

2- أعد حل المسألة باستخدام بحث فيبوناكس (ملاحظة: مجموع بحث الخمس نقاط يتطلب أن النقطتين الأوليين توضع $F_{5\epsilon'}$ للداخل من النقط النهائية للفترة الأصلية. لذلك N=6 لتحديد ϵ').

3- ثم أعد حل المسألة ببحث المتوسط الذهبي.

التمرين الثامن:

بين أن أخذ رقم n في تتابع فيبوناكس هو:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

(ملاحظة: تحقق من أن الاصطلاح الرياضي المعطى يحقق العلاقة الرجعية والشروط الأولية).

التمرين التاسع:

من التمرين الثامن اشتق:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_{N-1}}{F_N} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = 0{,}6180\ldots$$

التمرين العاشر:

تبين أعداد السكان في مدينة ما كما يلي:

السنة	1970	1980	1990	2000	2010
السكان	4.953	7.389	11.023	16.445	24.532

اعتمادا على هذه البيانات، المطلوب تقدير السكان في عام 2020:

1- افترض أن نمو السكان أُسيًّا ويتبع الصيغة $N = Ae^{mt}$، حيث أن N تدل على التعداد، و t تدل على الزمن.

2- عند أي سنة تعداد t، يكون هناك اختلاف بين القيمة الحقيقي لـ N المعطاة بالبيانات، والقيمة النظرية $N = Ae^{mT}$ أرمز لهذا الخطأ e_T ، أي أن:

3- حدد الثوابت A, m بحيث أن:

$$e_{1970}^2 + e_{1980}^2 + e_{1990}^2 + e_{2000}^2 + e_{2010}^2$$

تكون حدا أدنى.

4- باستخدام هذه الثوابت، قيم المنحى الأُسِّي النظري (الذي يسمى عادة منحنى المربعات الصغرى الأُسِّي) عند t=2020، وخذ هذا العدد ليكون التعداد المقدر لعام 2020.

التمرين الحادي عشر:

بين أن الدالة التربيعية:

$$f(x_1, x_2, \dots\dots x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

بمصفوفة معاملات متماثلة A تكون محدبة فقط إذا كانت A سالبة نصف مؤكدة.

التمرين الثاني عشر:

حل البرامج التالية حسابيا بمضروبات لاجرانج، وعدديا إما بطريقة نيوتن-رافسون، أو بطريقة الدالة الجزائية:

- البرنامج الأول: تعظيم: $Z = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$
  علما بأن: $x_1^2 + x_2^2 = 4$
- البرنامج الثاني: تخفيض: $Z = x_1x_2 + x_3$
  علما بأن: $x_2^1 + x_2^2 + x_3^2 = 1$
- البرنامج الثالث: تعظيم: $Z = x_1^2 + x_2x_3$
  علما بأن: $4x_1^2 + x_2^2 = 16$
  $2x_2 + 3x_3 = 25$

التمرين الثالث عشر:

أوجد النقطة على القطع المكافئ $y^2 = 4x$ الأقرب ما يكون إلى النقطة (1,0).

التمرين الرابع عشر:

استخدام مضروبات لاجرانج لحل المسألة التالية بدون شروط اللاسلبية، وبناءا على النتيجة حـــل المســـألة مع وجود شرط عدم السلبية:

تعظيم: $Z = 3x_1x_3 + 4x_2x_3$

علما بأن: $x_2^2 + x_3^2 = 4$

$x_1x_3 = 3$

التمرين الخامس عشر:

حل المسألتين التاليتين بمدخل الدالة الجزائية:

- المسألة الأولى: تخفيض : $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$

علما بأن: $x_1 - 2x_2 = -1$

$x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4$

- المسألة الثانية: تخفيض: $Z = \ln(1 + x_1) + \ln(1 + x_2)$

علما بأن: $x_1 + x_2 \leq 2$

كل المتغيرات غير سالبة.

(ملاحظة : بسط المسألة بتعظيم e^z ، وجعل القيد متساو).

قائمة المراجع:

أولا- باللغة العربية:

1- أحمد محمد الهزاع الصمادي: " أساسيات بحوث العمليات "، الطبعة الأولى، دار قنديل للنشر والتوزيع، عمان، 2008.

2- ثناء رشيد صادق أبو العيس: " بحوث العمليات-البرمجة الخطية "، منشورات جامعة عمر المختار البيضاء، ليبيا، 2005.

3- حسن ياسين طعمة-مروان محمد النسور: " بحوث العمليات-نماذج وتطبيقات "، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2009.

4- حسين محمود الجنابي: " الأحدث في بحوث العمليات "، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2010.

5- دلال صادق مصطفى عبد الجواد-حميد ناصر حميد الفتال: " بحوث العمليات "، دار اليازوري للنشر والتوزيع، عمان، 2008.

6- راتول محمد: " بحوث العمليات "، الطبعة الرابعة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2011.

7- ريتشارد برونسون-ترجمة حسن حسني الغباري ومحمد ابراهيم يونس: " سلسلة ملخصات شوم-نظريات ومسائل في بحوث العمليات "، الطبعة الثانية، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004.

8- صادق مهدي محسن العامري-عواطف ابراهيم الحداد: " تطبيقات في بحوث العمليات في الإدارة "، الطبعة الأولى، دار إثراء للنشر والتوزيع، عمان، 2009.

9- عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " المدخل لبحوث العمليات "، الطبعة الثالثة، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، 2009.

10-محمد اسماعيل بلال: " بحوث العمليات-استخدام الأساليب الكمية في صنع القرار"، دار الجامعة الجديدة، الاسكندرية 2005.

11-محمد الطراونة-سليمان عبيدات: " مقدمة في بحوث العمليات "، الطبعة الأولى، دار الميسرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، 2009.

12-مكيد علي: " بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية "، الجزء الأول، الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2011.

13-منعم زمزير الموسوي: "بحوث العمليات-مدخل علمي لاتخاذ القرارات "، الطبعة الأولـــى، دار وائـــل للنشر، عمان، 2009.

ثانيا- باللغة الأجنبية:

14- B.Oukacha-M.Aiden : « Recherche Opérationnelle -Programmation Linéaire », éditons Pages Bleues, Alger, 2007.

15- Jean-Claude Moisdon-Michel Nakhla : « Recherche opérationnelle-Méthodes d'optimisation en gestion », Mines ParisTech, Paris, 2010.

16- Robert Faure et autres : « Précis de recherche opérationnelle - Méthodes et exercices d'application », 6ème édition, Dunod, 2009.