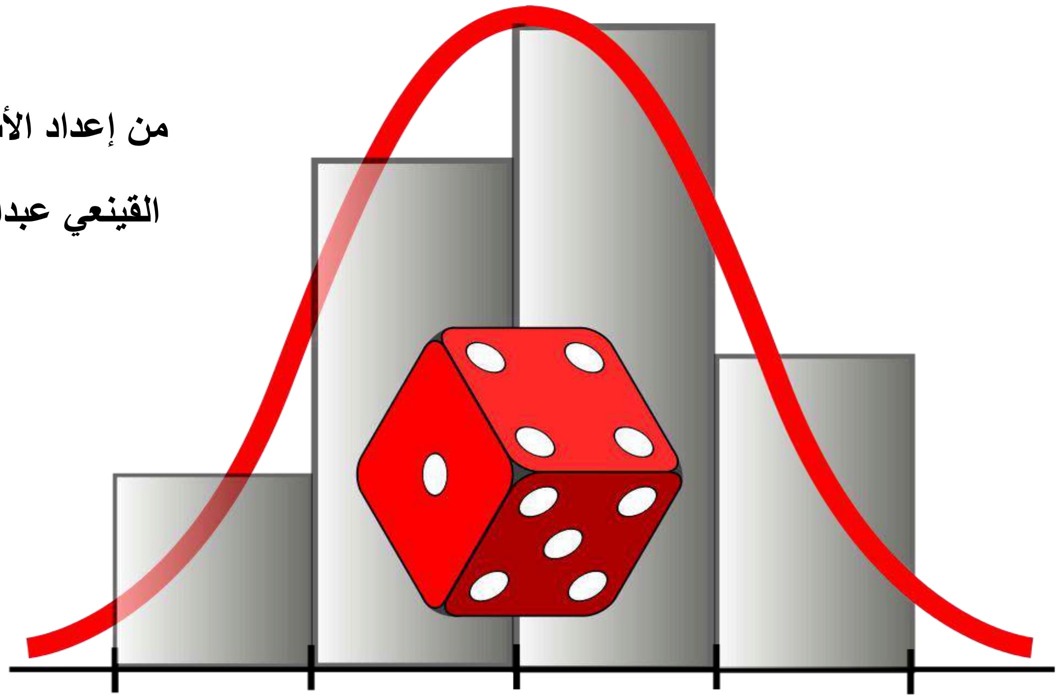
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البليدة 2 - لونيسي علي
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم علوم التسيير

مطبوعة تحت عنوان

محاضرات في الإحصاء 2

موجهة لطلبة السنة الأولى (LMD) جذع مشترك في العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

من إعداد الأستاذ:
القينعي عبدالحق



السنة الجامعية
2020/2019

فهرس المحتويات

تمهيد

توصف الاحتمالات من قبل العلماء المتخصصين بأنها الجزء الأساسي المكمل للحقيقة ونتاج الفكر البشري؛ وسميت الاحتمالات بسر حقيقة العلوم وطعمها وهي أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة نتائج التجارب العشوائية ودراسة قوانين الصدفة، وتلعب دوراً بارزاً في مختلف الميادين التي تحاول اتخاذ القرارات في ظل حالة عدم التأكد، بحيث في الكثير من الأحيان يتم اتخاذ القرارات بناءً على المعلومات غير الكافية، فيكون دور الاحتمالات في بناء وتقييم وقياس البدائل لاتخاذ القرارات الصائبة، والتنبؤ بسيرورة الظواهر البيولوجية والاجتماعية والاقتصادية...الخ.

يهدف هذا المقياس إلى تعريف الاحتمالات وتطبيقاتها المختلفة في التحليل الإحصائي، وذلك بهدف إكساب الطالب مجموعة من المهارات والخبرات في مجال علم الإحصاء ليتمكن في النهاية من توظيفها في انجاز البحوث والدراسات بصورة كمية ودقيقة، وقد تم تكييف هذه المطبوعة حسب المقرر الرسمي لوزارة التعليم العالي والبحث العلمي، وهي عبارة عن ملخصات لمحاضرات التي تقدم لطلبة السنة الأولى العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير؛ وهي مدعمة بتمارين محلولة وأخرى مقترحة، ويعد هذا المقياس تمهيداً لما سوف يدرسه الطالب في السنة الثانية لمقياس الإحصاء 3.

وقد رتبنا هذه المطبوعة بستة فصول، يبدأ الفصل الأول بموضوع بمبادئ نظرية المجموعات وهذا بالتطرق إلى النقاط التالية: مفاهيم عامة حول الاحصاء ونظرية المجموعات ثم طرق كتابة وتمثيل المجموعات وسرد العمليات على المجموعات؛ ثم تم وضع مجموعة من التمارين البعض منها محلول والبعض الأخر مقترح لطلبة حله.

أما في الفصل الثاني تم التطرق إلى نظرية الاحتمال وهذا من خلال التطرق إلى مفهوم الاحتمال وحسابه، وخواص الاحتمالات؛ ثم التطرق إلى قاعدة الجمع والضرب؛ بالإضافة إلى الاحتمال الشرطي والاحتمال الكلي؛ ومن ثم نظرية بايز وختاما بتمارين البعض منها محلول والبعض الأخر مقترح.

وفي الفصل الثالث تم التطرق إلى التحليل التوافقي وهذا بالتحليل والدراسة لطرق العد والتوفيقات والتباديل، كما تم وضع مجموعة من التمارين منها ما هو محلول ومنها ما هو مقترح لطلبة، أما في الفصل الرابع تم التعرج إلى موضوع المتغير العشوائي وهذا بتعرف المتغير العشوائي والتطرق إلى المتغير العشوائي المنفصل والمستمر؛ ثم تم وضع مجموعة من التمارين المحلولة والمقترحة.

أما في الفصل الخامس فتم التطرق إلى تعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة؛ توزيع برنوللي؛ التوزيع ذو الحدين؛ توزيع بواسون؛ التوزيع الهندسي، ثم تم وضع مجموعة من التمارين منها المحلولة ومنها ما هو مقترح للحل، وفي الفصل السادس والأخير فتم التطرق فيه إلى بعض من التوزيعات الاحتمالية

المستمرة: التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري؛ والتوزيع ذو الحدين باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري، بالإفاضة إلى التوزيع كاي تربيع؛ ثم عرض مجموعة من التمارين المحلولة والمقترحة.

وختاماً نرجو أن أكون قد وفقتُ في إنجاز هذا العمل خدمتنا لأبنائنا الطلبة، كما نرجو من إخواننا الأساتذة أن يوافون بملاحظاتهم حول هذه المطبوعة لكي نتلافى الأخطاء.

الفصل الأول
مبادئ نظرية المجموعات

1- مفاهيم عامة في الاحصاء

1-1: التجربة: تعد التجربة أحد الطرق لاكتساب المعرفة أو التحقق من نتيجة ما لظاهرة معينة، وتجري التجارب في كل المجالات التي شقها الإنسان لنفسه؛ فمثلا في مجال الطب قد يهتم باحث بدراسة تأثير دواء معينة على الشفاء من مرض ما، كما قد يهتم باحث ما في مجال الاقتصاد بدراسة تأثير ارتفاع الأسعار لسلعة ما على سلوك المستهلك للسلع البديلة، ومنه يمكن القول بأن التجربة هي عملية نحصل من خلالها على بيان مشاهدة أو قياسات قد تكون وصفية أو كمية، ونجد أغلب الحالات أن نتيجة التجربة تعتمد على عامل الصدفة، ولا يمكن التنبؤ بها؛ وهذا ما يشار إليه بالتجربة العشوائية.

1-2- التجربة العشوائية: هي التجربة التي لا يمكن معرفة نتيجتها مسبقاً، ومن أهم خواصها أنه يمكن تكرارها كما أن التجارب المتكررة لا تعطي بالضرورة نفس النتائج،[1] أي هي عملية أو إجراء نعرف مقدماً النواتج المحتملة لها ولكننا لا نعلم ما هي النواتج التي ستظهر لنا بالضبط إلا بعد التنفيذ الفعلي لهذه التجربة.

مثال01: عن التجربة العشوائية، صندوق به عشرة كرات مرقمة من 1 إلى 10، إذا سحبنا كرة واحدة من الصندوق؛ فإن النتائج الممكنة أن تظهر لنا هي رقم من الأرقام التالية: (1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10)، قبل إجراء التجربة نعلم بأن النتيجة سوف تكون أحد الأرقام من 1 إلى 10 لكن لا نعلم أي رقم سوف يظهر لنا بالضبط.

1-3: فضاء العينة (فراغ العينة): هي الفئة التي تشمل جميع نواتج التجربة العشوائية؛ ويرمز لفراغ العينة عادة بالرمز (Ω)، وهي مجموعة النتائج الممكنة للتجربة، ويرمز لها بالرمز S، ويرمز لعدد النتائج الممكنة لفراغ العينة بالرمز ($n(S)$)،[2] بمعنى أخر هو جميع حالات الظهور الممكنة عند إجراء تجربة عشوائية معينة، وفيما يلي بعض الأمثلة على فراغ العينة.

مثال 02: أكتب فضاء العينة (s) مع تحديد عدد عناصر الفضاء لتجارب العشوائية التالية:

1- في تجربة رمي (قذف) قطعة نقود في الهواء ونسجل النتيجة التي تظهر على الوجه العلوي؛

2- في تجربة رمي قطعتي نقود في الهواء (أو نقول رمي قطعة نقود مرتين)؛

3- في تجربة رمي ثلاثة قطع نقدية في الهواء (أو نقول رمي قطعة نقود ثلاثة مرات)؛

4- في تجربة رمي زهرة نرد (حجر نرد) مرة واحدة؛

5- في تجربة رمي زهرتي نرد مرة واحدة (أو نقول في تجربة رمي زهرة نرد مرتين)؛

6- في تجربة رمي زهرة نرد و قطعة نقود مرة واحدة معاً؛

---

[1]- شفيق العتوم، **طرق الإحصاء –تطبيقات اقتصادية وإدارية باستخدام spss**، ط 1، دار المنهاج للنشر والتوزيع، الأردن، 2005، ص 198.

[2]- لحسن عبدالله باشيوة، **مقدمة في الاحتمالات**، ط 1، دار الوارق للنشر والتوزيع، الأردن، 2013، ص 41.

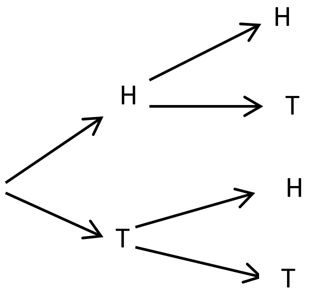
الحل: ج 1/ قطعة نقود لها وجهين : الصورة والرقم، نرمز للصورة بالرمز H والرقم T.

$S=(H , T)$ فضاء العينة ، $N(s)= 2$ عدد عناصر فضاء العينة

الرقم T

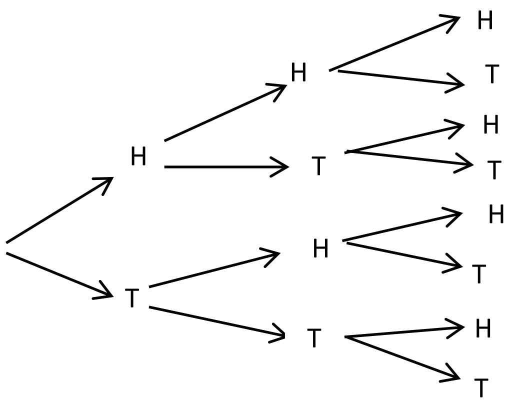
الصورة H

ج 2/ في حالة رمي قطعتي نقديتين مرة واحدة، فإن فراغ العينة التي يمكن الحصول عليها نوضحها بشجرة الاحتمالات كما يلي:



$S=\{HH , HT , TH , TT \}$, $n(s) = 4$ عدد عناصر فضاء العينة

ج 3/ في حالة رمي ثلاثة قطع نقدية مرة واحدة، فإن فراغ العينة التي يمكن الحصول عليها نوضحها بشجرة الاحتمالات كما يلي:



$S=\{HHH , HHT, HTH, HT, THH, THT,TTH, TTT\}$, $n(s) = 8$ عدد عناصر فضاء العينة

ج 4/ في تجربة إلقاء (رمي) زهرة نرد، زهرة نرد لها ستة أوجه، مرقمة من 1 إلى 6.

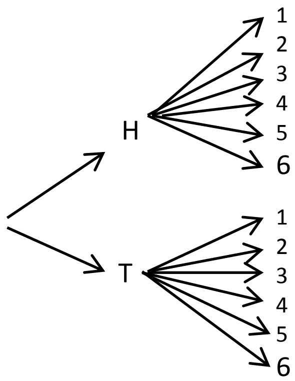
$S=\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$, $n(s) = 6$ عدد عناصر فضاء العينة

ج 5/ أما في تجربة رمي زهرتي نرد؛ ففضاء العينة هو:

$S=\{(1,1), (1,2) , (1,3) ,(1,4) ,(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1)$
$(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5)(4,6),(5,1),(5,2),(5,3)$
$,(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

عدد عناصر فضاء العينة $N(s)=36$

ج 6/ في حالة رمي زهرة نرد وقطعة نقود، فإن فضاء العينة هو:



$S=\{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$ $N(s)=12$

4-1: الحدث: الحدث هو ما يحدث نتيجة لإجراء التجربة، وهو مجموعة أو فئة جزئية من فراغ العينة، ونستنتج من هذا أن الحدث قد يكون فراغ العينة كله ويسمى في هذه الحالة بالحدث المؤكد؛ أو أي جزء من هذا الفراغ ويسمى في هذه الحالة بالحدث المحتمل؛ أو يحتوي على لا شيء من فراغ العينة (العينة الفارغة) ويسمى في هذه الحالة بالحدث المستحيل.

وتنقسم نتائج التجارب من وجهة نظر الاحتمالات إلى ثلاثة أنواع وهي:[1]

أ- نتائج أو حوادث مؤكدة: وهي نتائج أو حوادث لا بد من وقعها أو حدوثها، فمثلاً، إذا ألقيت قطعة نقود في الهواء، فإنها لا بد وأن تسقط على الأرض، وإذا كانت الحادثة مؤكدة الوقوع فإنه يقال أن احتمال وقوعها يساوي الواحد.

ب- نتائج أو حوادث مستحيلة: وهي نتائج أو حوادث يستحيل وقوعها، و هو الحدث الذي ليس به أي عنصر، مثل الحدث ظهور الرقم 7 في تجربة رمي زهرة نرد، حدث مستحيل لأن فضاء العينة لا يحوي الرقم 7، عدد عناصر هذا الحدث يساوي الصفر، فهو مجموعة خالية؛ فاحتمال وقعه يساوي الصفر.

ج- نتائج أو حوادث محتملة (ممكنة/غير مؤكدة): وهي نتائج التجارب العشوائية والتي لا نستطيع التنبؤ بوقعها مسبقاً، ولكننا نستطيع باستخدام تعريف الاحتمالات أن نحسب احتمال وقوعها، وإذا كانت الحادثة محتملة، فإن احتمال وقوعها ينحصر بين الصفر والواحد.

[1]- جلال الصياد وأخرون، **الإحصاء**، دار حافظ للنشر والتوزيع، السعودية، سنة 1429ه ، ص 58.

2- نظرية المجموعات

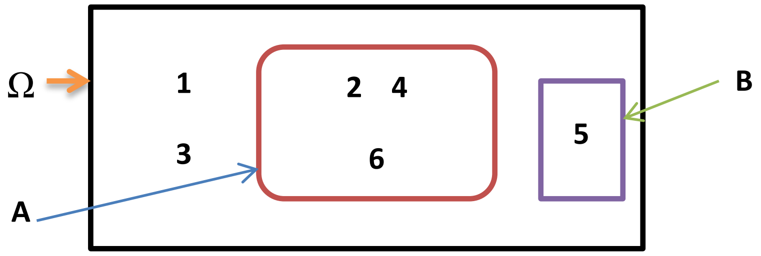
قبل التعرج إلى قوانين الاحتمالات لا بد من التطرق إلى موضوع المجموعات والعمليات الجبرية التي تتم على المجموعات، وهذا لما لها من دور كبير في التطبيقات الاحتمالية، لذا سوف نتعرف على بعض المفاهيم التي نحتاج إليها في موضوعاتنا القادمة.

2-1: المجموعة: هي عبارة عن تجمع من الأشياء (العناصر) معرفة ومحددة تحديدا تاما، أي ذات العناصر مشتركة الصفات والتي من خلالها نستطيع الحكم على أن العنصر ينتمي ($\in$) أولا ينتمي ($\notin$) لهذه المجموعة،[1] وعادة يرمز لها بحروف هجائية كبيرة مثل $(A, B, C, D, E \ldots.)$، أما عناصر المجموعة فيرمز لها بحروف هجائية صغيرة مثل $(, b, c, d, e \ldots)$.

2-2: المجموعة الجزئية: يقال بأن مجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B عندما تكون جميع عناصر المجموعة A ضمن المجموعة B وتكتب بالشكل التالي $(A \in)$، أما إذا كانت المجموعة A ليست مجموعة جزئية ضمن المجموعة B فتكتب بالشكل التالي $(A \notin B)$.

مثال 03: عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة، فإن فضاء العينة هو $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، وليكن الحدث A الحصول على عدد زوجي، وليكن الحدث B الحصول على العدد 5.

$$\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}\} \qquad \mathbf{,}\, \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



ومنه فإن A محتوات في Ω، و B محتوات في Ω، لكن B ليست محتوات في A.

2-3: المجموعة الشاملة: المجموعة الشاملة هي التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، أو تسمى بفضاء العينة، كما هو في المثال السابق بحيث تمثل Ω المجموعة الشاملة وكل من A و B مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة Ω.

2-4: المجموعة الخالية: وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر، ويرمز لها بالرمز $(\emptyset)$.
على سبيل المثال لا الحصر، وزن أي طالب يفوق 300كلغ في جامعة البليدة، فهذه المجموعة خالية، مثال ثاني، هل يوجد في جامعة البليدة 2 طالب يفوق سنة 200 سنة، فهذه المجموعة خالية.

2-5: المجموعات المنتهية: هي المجموعات التي عدد عناصرها محدود، مثل عدد أيام الأسبوع؛ عدد أصابع اليد، عدد ولايات الجزائر...الخ.

[1]- محمود محمد سليم صالح، **مبادئ التحليل الإحصائي**، ط 1، جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية، السعودية، 2011، ص 130.

6-2: المجموعة الغير المنتهية: وهي المجموعة التي عدد عناصرها غير منتهي، مثل الأعداد الطبيعية؛ عدد النجوم في السماء؛ مجموعة نقاط الخط المستقيم...الخ.

3- طرق كتابة وتمثيل المجموعات

1-3: طرق كتابة المجموعات: تكتب المجموعات بين قوسين بإحدى الطرق التالية:

1-1-3: طريقة سرد المجموعات: وذلك عندما يكون عدد عناصر المجموعات A منتهيا فيمكننا كتابة جميع العناصر بين قوسين بينهما فاصلة على الصورة، مثلا في تجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة، فإن فضاء العينة هو كما يلي:

$$\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

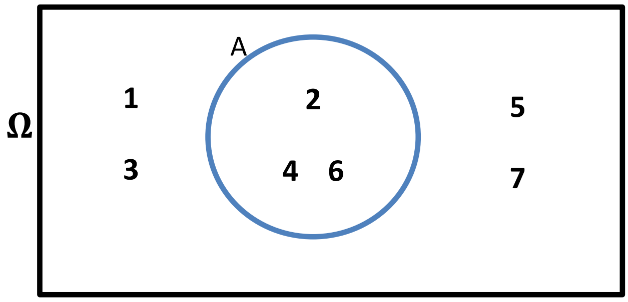
2-1-3: طريقة الصفة المميزة: وفي هذه الحالة تكتب المجموعة A على الصورة علاقة رياضية كما يلي (في تجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة فإن فضاء العينة هو):

$$\mathrm{A} = \{X: 1 \leq X \leq 6 \ \}$$

2-3: تمثيل المجموعات: تمثل المجموعات بأشكال هندسية تسمى أشكال فن (Ω) وهي عبارة عن رسوم هندسية مثل الدوائر والمستطيل والمثلث...الخ، وتكون عناصر المجموعات عبارة عن نقاط داخل الشكل الهندسي وأشهر هذه الأشكال هو الدائر والتي سوف نستخدمها هنا للتعبير عن شكل فن، وهذه الأشكال تساعد على فهم العمليات التي تتم على المجموعات كما سنرى فيما بعد.[1]

مثال 04: وعاء يحتوي على سبعة كرات مرقمة من الواحد إلى سبعة، وليكن الحدث A الحصول على كرة تحمل عدد زوجي، فكتابة فضاء العينة والحدث A والتمثيل يكون كما يلي:

$$\boldsymbol{\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5, 6 , 7\}} \qquad , \quad \boldsymbol{A = \{2 , 4, 6\}}$$

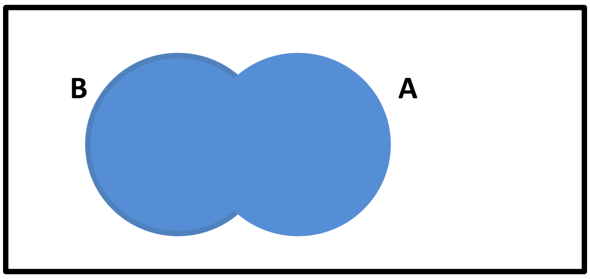


[1] - محمود محمد سليم صالح، **مبادئ التحليل الإحصائي**، ط 1، جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية، السعودية، 2011، ص 133.

4- العمليات على المجموعات

4-1: اتحاد المجموعات: اتحاد مجموعتين A و B ينتج عنه مجموعة جديدة C والتي تمثل مجموعة العناصر الموجودة في A أو B أو كليهما أو بطريقة أخرى هي مجموعة عناصر المجموعتين بدون تكرار للعناصر المكررة، ويرمز لعملية الاتحاد بالرمز (U)، أما رياضياً تكتب بالشكل التالي[1]:

$A \cup B = \{X:\ X \in A \text{ أو } X \in B\}$



خصائص الاتحاد:

$1)\ \boldsymbol{A \cup A = A}$ $\quad 2)\ \boldsymbol{A \cup \phi = A}$ $\quad 3)\ \boldsymbol{A \cup \Omega = \Omega}$ $\quad 4)\ \boldsymbol{A \cup B = B \cup A}$

$5)\ \boldsymbol{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$ $\quad 6)\ \boldsymbol{A \subseteq (A \cup B)\ ,\ \ B \subseteq (A \cup B)}$

مثال 05: إذا كانت لديك المجموعات التالية:

$$\boldsymbol{A = \{2,4,6,8\}\ ,B = \{1,2,3\,,7,8\,,9\,,10\}\,,C = \{1,3\,,5\}}$$

المطلوب : أوجد كل ما يأتي مع تحديد عدد عناصر كل منها:

$1)\ \ \boldsymbol{A \cup B} \qquad , \qquad \boldsymbol{n(A \cup B)}$

$2)\ \ \boldsymbol{A \cup C} \qquad , \qquad \boldsymbol{n(A \cup C)}$

$3)\ \ \boldsymbol{B \cup C} \qquad , \qquad \boldsymbol{n(B \cup C)}$

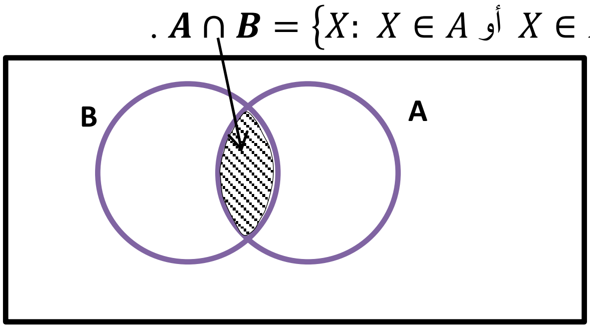
الحل: يمكن كتابة اتحاد المجموعات على النحو التالي:

$1)\ \ \boldsymbol{A \cup B = \{1\,,2\,,3,4,6\,,7\,,8\,,9\,,10\}} \qquad , \qquad \boldsymbol{n(A \cup B) = 9}$

$2)\ \ \boldsymbol{A \cup C\ = \{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,8\}} \qquad , \qquad \boldsymbol{n(A \cup C) = 7}$

$3)\ \ \boldsymbol{B \cup C = \{1\,,2\,,3\,,5\,,7\,,8\,,9\,,10\}} \qquad , \qquad \boldsymbol{n(B \cup C) = 8}$

4-2: تقاطع المجموعات: يعرف تقاطع مجموعتين A و B على أنه جميع العناصر الموجودة في كلا المجموعتين؛ أيهي مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين أو نقول العناصر المشتركة، ويرمز لها بالرمز $\boldsymbol{A \cap B}$، أو بالرمز $\boldsymbol{A \cap B} = \{X:\ X \in A \text{ أو } X \in B\}$.



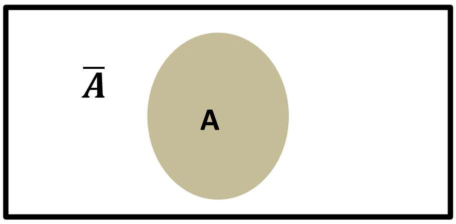
[1]- البشير عبدالكريم، **إحصاء 2 (الاحتمالات والاحصاء)**، دار الكتاب العربي، الجزائر، 2006، ص 22.

خصائص التقاطع:

$$1)\ A\cap A=A \qquad 2)\ A\cap \phi=\phi \qquad 3)\ A\cap \Omega=A \qquad 4)\ A\cap B=B\cap A$$

$$5)\ (A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C) \qquad 6)\ A\cap B\subseteq A\ ,\quad A\cap B\subseteq B$$

3-4: متممة المجموعة (المكملة): ليكن فضاء العينة (Ω) و الحدث (المجموعة الجزئية) A؛ فإن المجموعة ($\bar{A}$) هي المجموعة المتممة للمجموعة A ، وتقرأ ($\bar{A}$) متممة (المكملة) لـ A، وتقاطع A مع $\bar{A}$ نحصل على مجموعة خالية.



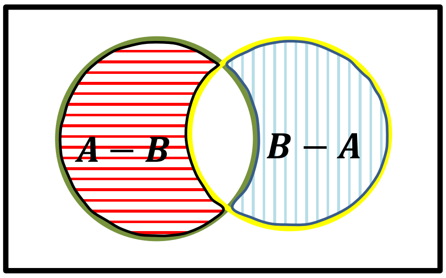
$$\Omega = A+\bar{A}$$

$$A\cap \bar{A} = \phi$$

4-4: الفرق بين المجموعات: يعرف الفرق بين مجموعتين B و A على أنه مجموعة العناصر الموجودة، إما في A أو إما في B؛ ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين، أو بمعنى أخر العناصر الموجودة في A فقط وغير موجودة في B (حدوث الحدث A فقط)؛ أو العكس هي العناصر الموجودة في B فقط وغير موجودة في A (حدوث الحدث B فقط)، ويكتب بالصيغة التالية:

$$A-B=\{x: x\in A\,, x\notin B\}\quad ,\quad B-A=\{x: x\in B\,, x\notin A\}$$

$$A-B\neq B-A \qquad , \qquad A-B=A\cap \bar{B}$$



قاعدة دمورغن ($De\ Morgan$): لتكن كل من A و B مجموعتين جزئيتين من فضاء العينة (Ω) فإن:[1]

$$1)\ \overline{(A\cap B)} = \bar{A}\ \cup\ \bar{B}$$

$$2)\ \overline{(A\cup B)} = \bar{A}\ \cap\ \bar{B}$$

[1]- محمد حسين محمد رشيد و منى عطاالله الشويلات، **مبادئ الإحصاء والاحتمالات ومعالجتها باستخدام برنامج spss**، ط 1، دار صفاء لنشر والتوزيع، الأردن، 2012، ص 233.

تمارين الفصل الأول

التمرين 01: أكتب فضاء العينة لتجارب العشوائية التالية:

1- وعاء به 10 كرات مرقمه من 1 إلى 10؛

2- في تجربة رمي قطعتي نقود وزهرة نرد معا مرة واحدة فقط؛

3- في تجربة رمي زهرتي نرد؛

التمرين 02: افترض أن فراغ العينة معطى بالمجموعة التالية:

$$\Omega = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$A = \{2, 6, 9, 14, 16\},\ B = \{2, 4, 7, 10, 12, 16\},\ C = \{4, 8, 12\}$$

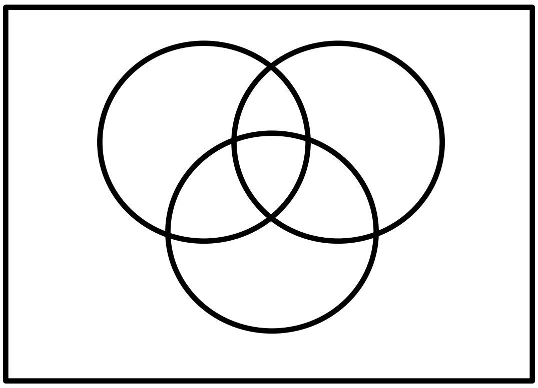
المطلوب: أوجد كل من ما يلي:

1) $A \cap C$, 2) $A \cup C$, 3) $A \cap B$, 4) $A \cup B$

5) $B \cap C$, 6) $B \cup C$, 7) $\overline{A \cap B}$, 8) $\overline{A \cup B}$

9) $\overline{A \cap C}$, 10) $\overline{A \cup C}$, 11) $\overline{A}$, 12) $\overline{B}$

التمرين 03: ليكن لديك فضاء العينة (Ω) متعلق بالتجربة العشوائية ولنعرف الحوادث A، B، C من (Ω)، وضح على الشكل المقابل الحوادث التالية:



1- وقوع الحدث C فقط؟

2- وقوع الحدثين A و B معا عدم وقوع الحدث C؟

3- وقوع حدث على الأقل؟

4- وقوع حدثين على الأقل؟

5- وقوع ثلاثة حوادث على الأقل (وقوع ثلاثة حوادث A، B، C معاً؟

6- وقوع حدثين على الأكثر؟

7- عدم وقوع أي حدث؟

8- حصول حدث واحد فقط؟

التمرين 04: نقوم برمي حجر نرد مرة واحدة، فأوجد الحوادث التالي:

A: الحصول على عدد فردي؛

B: الحصول على عدد أقل أو يساوي 4؛

C: الحصول على عدد زوجي؛

المطلوب: أوجد كل من ما يلي:

$\mathbf{A \cup B}$, $\boldsymbol{A \cap B}$, $\boldsymbol{A - B}$, $\boldsymbol{B - A}$, $\overline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{B}}, \overline{\boldsymbol{C}}$, $\overline{(\boldsymbol{A \cap B})}$, $\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$

التمرين 05: في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، وليكن الحدث A الحصول على عدد أقل من 3، والحدث B الحصول على عدد زوجي، المطلوب بين بأن:

1) $\overline{(\boldsymbol{A \cap B})} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$ **2)** **1)** $\overline{(\boldsymbol{A \cup B})} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$

التمرين 06: في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتالتين؛ وباعتبار أن X تمثل نتيجة الرمية الأولى؛ و Y تمثل نتيجة الرمية الثانية، فالمطلوب كتابة الحوادث التالية:

1) $A = \{(x, y) : x + y < 5\}$

2) $B = \{(x, y) : x + y \leq 8\}$

3) $C = \{(x, y) : x = y\}$

4) $E = \{(x, y) : x + y > 11\}$

5) $F = \{(x, y) : |x - y| \leq 2\}$

6) $G = \{(x, y) : x + y \geq 7\}$

7) $H = \{(x, y) : x.y = 9\}$

8) $I = \left\{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4\right\}$

التمرين 07: في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية:

1/ أكتب فضاء العينة وعدد عناصرها؟

2/ أكتب الحادثة A ظهور صورة في الرمية الأولى؟

3/ أكتب الحادثة B ظهور صورة واحدة على الأقل؟

4/ أكتب الحادثة C ظهور صورتين فقط؟

5/ أكتب الحادثة D ظهور صورتين على الأكثر؟

6/ أكتب الحادثة E عدم ظهور أي صورة في ثلاث رميات؟

حلول تمارين الفصل الأول

التمرين 01: أكتب فضاء العينة لتجارب العشوائية التالية:

ج 1/ وعاء به 10 كرات مرقمه من 1 إلى 10؛

$$\Omega = \{1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9 ,10\} \ , \ \ n(\Omega) = 10$$

ج 2/-في تجربة رمي قطعتي نقود وزهرة نرد معا مرة واحدة فقط؛

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (1hhh), (2hhh), (3hhh), (4hhh), (5hhh), (6hhh), (1hht), (2hht), \\ (3hht), (4hht), (5hht), (6hht), (1hth), (2hth), (3hth), (4hth), \\ (5hth), (6hth), (1htt), (2htt), (3htt), (4htt), (5htt), (6htt), (1thh) \\ (2thh), (3thh), (4thh), (5thh), (6thh), (1tht), (2tht), (3tht), (4tht) \\ (5tht), (6tht), (1tth), (2tth), (3tth), (4tth), (5tth), (6tth), (1ttt), \\ (2ttt), (3ttt), (4ttt), (5ttt), (6ttt) \end{array} \right\}$$

ج 3 / فضاء العينة لتجربة رمي زهرتي نرد هو:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), \\ (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), \\ (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

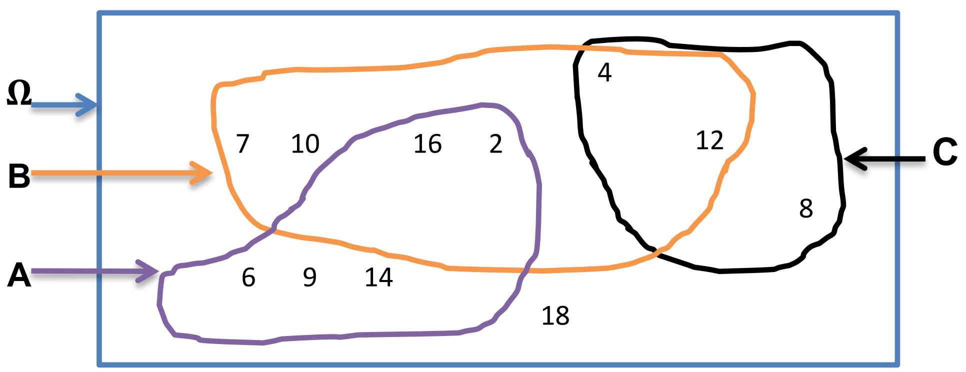
عدد عناصر الفضاء $\boldsymbol{n(\Omega) = 36}$

حل التمرين02: افترض أن فراغ العينة معطى بالمجموعة التالية:

$$\boldsymbol{\Omega = \{2 ,4 ,6 ,7 ,8 ,9 ,10, 12 ,14 ,16 ,18\}}$$

$$\boldsymbol{A = \{2 ,6 ,9 ,14 ,16\}, \ B = \{2 ,4 ,7 ,10 ,12 ,16\} \ , \ C = \{4 , \ 8 ,12\}}$$

لتسهيل عملية الحل يمكن أن نوضح ونبين المجموعات في مخطط فان، كما يلي:



$\boldsymbol{1)\ A \cap C = \phi}$, $\boldsymbol{2)\ A \cup C = \{2, 4, 6 ,8 ,9 ,12 ,14 ,16\}}$

$\boldsymbol{3)\ A \cap B = \{2 ,16\}}$, $\boldsymbol{4)\ A \cup B = \{2 ,4 ,6 ,7 ,9 ,10 ,12 ,14 ,16\}}$

$\boldsymbol{5)\ B \cap C = \{4 ,12\}}$, $\boldsymbol{6)\ B \cup C = \{2, 4 ,7 ,8 ,10, 12 ,16\}}$

$\boldsymbol{7)\ \overline{A \cap B} = \Omega - A \cap B = \{4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 18\}}$

$8)\ \overline{\boldsymbol{A \cup B}} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{A \cup B} = \{\mathbf{8}\,,\mathbf{18}\}$,

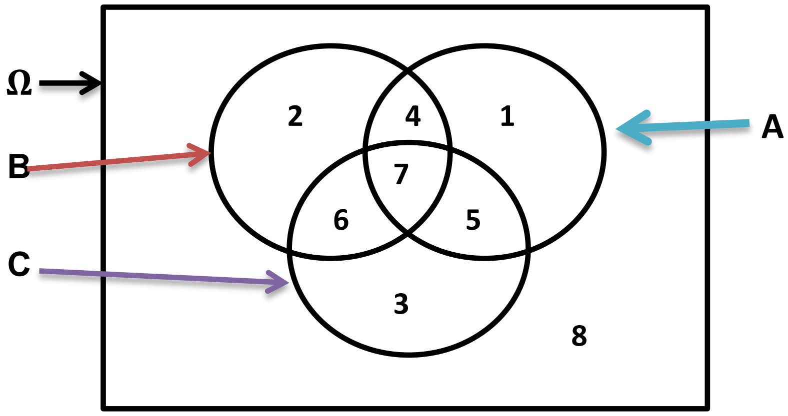
$9)\ \overline{\boldsymbol{A \cap C}} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{A \cap C} = \boldsymbol{\Omega}$

$10)\ \overline{\boldsymbol{A \cup C}} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{A \cup C} = \{\mathbf{7}\,,\mathbf{10}\,,\mathbf{18}\}$

$11)\ \overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{A} = \{\mathbf{4},\mathbf{7},\mathbf{8}\,,\mathbf{10}\,,\mathbf{12}\,,\mathbf{18}\}$

$12)\ \overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{B} = \{\ \mathbf{6}\ ,\mathbf{8}\,,\mathbf{9}\ ,\mathbf{14}\ ,\mathbf{18}\}$

التمرين 03: ليكن لديك فضاء العينة (Ω) متعلق بالتجربة العشوائية ولنعرف الحوادث A، B، C من (Ω)لتوضيح نضع الأرقام من 1 إلى 8 لنبين الحوادث على الشكل المقابل التالية:



ج 1- وقوع الحدث C فقط؛ بظهور الرقم 3 فقط يعني وقوع الحدث C فقط.

$E_1 = C \cap \bar{A} \cap \bar{B}$

ج 2- وقوع الحدثين A و B معا عدم وقوع الحدث C؛ بظهور الرقم 4 فقط يعني وقوع الحدث A و B.

$E_2 = A \cap B \cap \bar{C}$

ج 3- وقوع حدث على الأقل: وهي بظهور الأرقام 1 إلى 7 ما عدا الرقم 8.

$$E_3 = \{(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)\}$$

ج 4- وقوع حدثين على الأقل: وهي بظهور الأرقام 4 أو 5 أو 6 أو 7.

$$E_4 = \{(\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)\}$$

ج 5- وقوع ثلاثة حوادث على الأقل (وقوع ثلاثة حوادث A، B، C معاً؟

$$E_5 = \{(A \cap B \cap C)\}$$

ج 6- وقوع حدثين على الأكثر: وهي بظهور الأرقام كلها ما عدا الرقم 7.

$$E_6 = \{(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})\}$$

ج 7- عدم وقوع أي حدث: عدم وقوع أي حدث هي الحيز الذي يشغله الرقم 8.

$E_7 = \{(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})\}$

ج 8- حصول حدث واحد فقط: وهذا بظهور أحد الأرقام : 1 أو 2 أو 3 فقط.

$E_8 = \{(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)\}$

حل التمرين 06: فضاء العينة لتجربة رمي زهرتي نرد هو:

$$\boldsymbol{\Omega(x,y)} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),} \\ \mathbf{(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)} \\ \mathbf{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),} \\ \mathbf{(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)} \end{matrix}\right\}$$

عدد عناصر الفضاء $\boldsymbol{n(\Omega) = 36}$

كتابة الحوادث:

1) $A = \{(x,y) : x+y < 5\} = \{\mathbf{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)}\}$

2) $B = \{(x,y) : x+y \le 8\}$

$$= \left\{\begin{matrix} \mathbf{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),} \\ \mathbf{(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),} \\ \mathbf{(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),(6,1),(6,2),} \end{matrix}\right\}$$

3) $C = \{(x,y) : x = y\} = \{\mathbf{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}\}$

4) $E = \{(x,y) : x+y > 11\} = \{\mathbf{(6,6)}\}$

5) $F = \{(x,y) : |x-y| \le 2\} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),} \\ \mathbf{(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),} \\ \mathbf{(3,5),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)} \\ \mathbf{(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),} \\ \mathbf{(6,6)} \end{matrix}\right\}$

6) $G = \{(x,y) : x+y \ge 7\} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{(1,6),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),} \\ \mathbf{(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),(5,3),} \\ \mathbf{(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),} \\ \mathbf{(6,4),(6,5),(6,6)} \end{matrix}\right\}$

7) $H = \{(x,y) : x.y = 9\} = \{\mathbf{(3,3)}\}$

8) $I = \left\{(x,y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4\right\} = \{\mathbf{(4,4)}\}$

حل التمرين 07: في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية:

1/ أكتب فضاء العينة وعدد عناصرها؟

S={HHH , HHT, HTH, HTT, THH, THT,TTH, TTT}, n(s) = 8 عدد عناصر فضاء العينة

2/ أكتب الحادثة A ظهور صورة في الرمية الأولى:

$A = \{HHH\ , HHT, HTH, HTH\}$

3/ أكتب الحادثة B ظهور صورة واحدة على الأقل:

$B = \{HHH\ , HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\}$

4/ أكتب الحادثة C ظهور صورتين فقط:

$C = \{HHT, HTH, HTT, THH\}$

5/ أكتب الحادثة D ظهور صورتين على الأكثر:

$D = \{HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

6/ أكتب الحادثة E عدم ظهور أي صورة في ثلاث رميات:

$E = \{TTT\}$

الفصل الثاني
مدخل إلى نظرية الاحتمال

1- مفهوم الاحتمال

كثيراً ما نستخدم مصطلح الاحتمال كأن نقول احتمال فوز فريق على فريق أخر 70%، أو كأن نقول احتمال نجاح طالب ما في شهادة بالبكالوريا هو 90%، أو نقول احتمال تساقط الثلوج 60%...الخ، فاحتمال كلمة شائعة في لغتنا اليومية ودائما نستعملها عندما نتكلم عن شيء يتحكم في حدوثه عوامل الصدفة، ويقصد بهذه الكلمة فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، وتستخدم الاحتمالات في الكثير من النواحي التطبيقية، مثل المجال الاقتصادي والتجاري؛ الزراعي؛ الطبي...الخ.

فالاحتمال هو مقياس لإمكانية وقوع حدث أو فعل معين وإحصائياً تستخدم الاحتمالات في التجارب العشوائية لمعرفة فضاء العينة وتوقع الأحداث ونسبة حدوث كل حدث،[1] ويعرف الاحتمال على أنه إمكانية وقوع أمر ما لسنا على ثقة تامة بحدوثه، والاحتمال هو درجة الثقة في وقوع حادثة ما.

2- حساب الاحتمال: يوجد أسلوبان لتقدير احتمال حدوث حدث ما:

2-1: الاحتمال النظري (الكلاسيكي): يستخدم الاحتمال التقليدي لدراسة حالات عدم التأكد، وقد ظهر في القرن الثامن عشر من خلال ألعاب المقامرة والحظ مثل رمي قطعة نقود أو زهرة طاولة أو سحب الأوراق.

الاحتمال النظري لحدوث حدث ما هو نسبة عدد الحالات المواتية إلى عدد الحالات الممكنة الحدوث على فرض أن كل الحالات لها نفس فرص الحدوث، فإذا كان فضاء العينة لتجربة عشوائية ما هو S يحتوي على عدد منتهي من العناصر $n(S)$، وكان الحدث A يحتوي على عدد $n(A)$ من العناصر المتماثلة فإن الاحتمال النظري للحدث A ويرمز له بالرمز $P(A)$، ويحسب بالصيغة التالية:[2]

$$\boldsymbol{p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الحدث}A}{\text{عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الحدث}S}}$$

ويفسر الاحتمال حسب هذا المنهج التقليد (الكلاسيكي) على أنه إذا كانت الحوادث البسيطة في تجربة ما هي حوادث ذات فرص متساوية ومتنافية شاملة، فإن احتمال أي حدث يساوي نسبة عدد الحوادث البسيطة التي تحقق هذا الحدث إلى مجموعة الحوادث البسيطة الممكنة.[3]

ويشار إلى هذا النوع من الاحتمالات بالاحتمالات القبلية (بصورة مسبقة) قبل إجراء التجربة يمكننا أن نحسب احتمال وقع حادثة ما، لأننا نعلم عدد النواتج المحددة وإجمالي عدد النواتج قبل حدوث النشاط،

مثال: في تجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحدة (أي أن فرصة ظهور أي رقم من الأرقام من 1 إلى 6 هي فرص متساوية).

---

[1]- لحسن عبدالله باشيوة، **مقدمة في الإحتمالات**، دار الورق للنشر والتوزيع، الأردن، 2014، ط 1، ص 48.

[2]- محمود محمد سليم صالح، **مبادئ التحليل الإحصائي**، ط 1، جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية، السعودية، 2011، ص 169.

[3]- جورج كانافوس و دون ميلر، تعريب: سلطان محمد عبدالحميد و محمد توفيق البلقيني، **الإحصاء للتجاريين مدخل حديث**، دار المريخ، الرياض، 2004، ص 146.

$$p(x=1)=p(x=2)=p(x=3)=p(x=4)=p(x=5)=p(x=6)=1/6$$

مثال : وعاء به عشرة كرات متماثلة، 5 منها حمراء و 3 بيضاء، 2 سوداء، سحبت كرة من الوعاء فأحسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء، ثم أن تكون حمراء ثم على أن تكون زرقاء؟

$$P(B\text{بيضاء})=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{10}$$

$$P(R\text{حمراء})=\frac{n(R)}{n(S)}=\frac{5}{10}$$

$$P(N\text{سوداء})=\frac{n(N)}{n(S)}=\frac{2}{10}$$

2-2: الاحتمال التجريبي (الاحتمال التكراري النسبي):

توجد العديد من التجارب التي نعجز فيها على تطبيق التعريف السابق للاحتمالات؛ وهذا راجع إلى عدم القدرة على حصر جميع الحالات المواتية والحالات الكلية أو إلى أن فرص غير متساوية الاحتمال، مثلاً احتمال حدوث زلزال في الأيام القادمة؛ لأننا لا نعلم عدد الزلازل التي سوف تحدث في الأيام القادمة، افترض في تجربة إلقاء قطعة نقود متجانسة، هنا التفسير الكلاسيكي لا يمكن استخدامه لتحديد احتمال ظهور الصورة أو الرقم لأننا لا يمكن القول بأن الاحتمالات متساوية، في هذه الحالة نلجأ إلى التكرار النسبي للاحتمالات.

يعتمد التفسير التكراري النسبي على افتراض أن التجربة العشوائية يمكن تكرارها عدة مرات تحت نفس الظروف، وفي كل مرة تنفذ فيها التجربة نقوم بتسجيل نواتجها، هذه النواتج لا يمكن التنبؤ بها بسبب طبيعة الصدفة أو العشوائية للتجربة العشوائية، في بعض الأحيان قد يتحقق حدث معين وقد لا يتحقق، ولكن كلما كررنا التجربة لعديد المرات فإن هذا الحدث سوف يتحقق بنسبة معينة، وبالتالي الاحتمال لأي حدث يمكن تعريفه على أنه نسبة من المرات أو المحاولات التي يتحقق بها الحدث خلال عدد لانهائي من تكرار التجربة تحت نفس الظروف.[1]

فإذا كنا مهتمين بتحديد احتمال وقوع الحدث A، وقمنا بتكرار التجربة لعدد كبير من المرات N تحت نفس الشروط (الظروف)، فإن عدد مرات ظهور الحدث A هي n عندئذ نسمي النسبة $\boldsymbol{\frac{n}{N}}$ بالتردد النسبي أو التكرار النسبي للحدث A، ويمكن اعتبارها مساوية تقريباً $P(A)$، ومن هنا يمكن إعطاء التعريف الإحصائي للاحتمال بالشكل التالي:[2]

$$\boldsymbol{p(A)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{N}\right)}$$

[1]- جورج كانافوس و دون ميلر، تعريب: سلطان محمد عبدالحميد و محمد توفيق البلقيني، **الإحصاء للتجاريين مدخل حديث**، دار المريخ، الرياض، 2004، ص 148.

[2]- مبارك اسبر ديب، **مبادئ في الإحتمالات والإحصاء**، قسم الرياضيات، السنة الأولى، جامعة تشرين، كلية العلوم، سوريا، 2009، ص 103.

3- خواص الاحتمالات: يتصف احتمال وقوع حادث معين A في فراغ العينة (Ω) بحيث يرمز لاحتمال الحادث A بالرمز $p(A)$ والذي يتميز بالتالي:

1/ فإن احتمال وقوع الحدث A يكون محصور ما بين الصفر والواحد $\mathbf{0 \leq p(A) \leq 1}$.

ومنه نستنتج إذا كانت القيمة الاحتمالية للحدث A تساوي الصفر فإن الحدث A هو حدث مستحيل الوقوع لأن مجموع عناصره يساوي الصفر (المجموعة الخالية)، أما إذا كانت تساوي الواحد فيسمى بالحدث الأكيد أي مجموع عناصره يساوي مجموع عناصر فراغ العينة، أما إذا كانت قيمته أقل تماماً من الواحد وأكبر تماماً من الصفر فيسمى بالحدث المحتمل.

2/ أما احتمال فراغ العينة يساوي الواحد $\boldsymbol{p(\Omega) = 1}$.

3/ احتمال أي مجموعة خالية يساوي الصفر، أي أن $\boldsymbol{p(\phi) = 0}$.

4/ إذا كانت A_i .... A_3 ، A_2 ، $_1$ عدد لانهائي من الحوادث المانعة (المتنافية مثنى مثنى) بالتبادل فإن:

$$\boldsymbol{p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \ldots \cup A_i) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + p(A_4) \ldots + p(A_i)}$$

5/ ليكن الحدث A من فراغ العينة Ω، فإن لكل حدث حدث معاكس – متمم – مكمل، ويرمز له بالرمز $\bar{}$ ومنه فإن احتمال وقوع هذا الحدث يساوي:

$$\boldsymbol{p(\bar{A}) = p(\Omega) - p(A) = 1 - p(A)}$$

مثال: في تجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحدة، أحسب الاحتمالات التالية:

1/ احتمال الحصول على عدد أقل تماماً من 7؟

2/ احتمال الحصول على عدد أكبر من أ و يساوي 7 ؟

3/ احتمال الحصول على عدد فردي؟

4/ احتمال الحصول على عدد أكبر من 5؟

5/ احتمال الحصول على عدد فردي أو أكبر من العدد 5؟

6/ احسب احتمال أن لا يقع الحدث الحصول على عدد فردي؟

الحل: فضاء العينة هو $\Omega = (1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6)$

$$\mathbf{1/}\ \boldsymbol{A(x < 7) = (1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6) \quad , \quad p(A) = \frac{6}{6} = 1}$$

$$\mathbf{2/}\ \boldsymbol{B(x \geq 7) = \emptyset \quad , p(B) = \frac{0}{6} = 0}$$

$$\mathbf{3/}\ \boldsymbol{C(x\ \text{عدد فردي}) = \{1\,,3\,,5\} \quad , p(C) = \frac{3}{6} = 1/2 = 0.5}$$

$$\mathbf{4/}\ \boldsymbol{D(\,x > 5) = \{6\} \quad , p(D) = \frac{1}{6}}$$

$$5/\quad E(C\cup D)=(1\,,3\,,5\,,6)\qquad ,\ p(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}=\frac{4}{6}=2/3\qquad ,$$

$$p(E)=p(C\cup D)=p(C)+p(D)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=2/3$$

$$6/\ \overline{C}(x)=\Omega-C=\{2\,,4\,,6\}\,,\ \ p(\overline{C})=p(\Omega)-p(C)=1-\frac{1}{2}=1/2$$

مثال: إذا كان احتمال نجاح طالب في مقياس الإحصاء يساوي 0.75 فما احتمال رسوب هذا الطالب؟

لنعرف الحوادث:

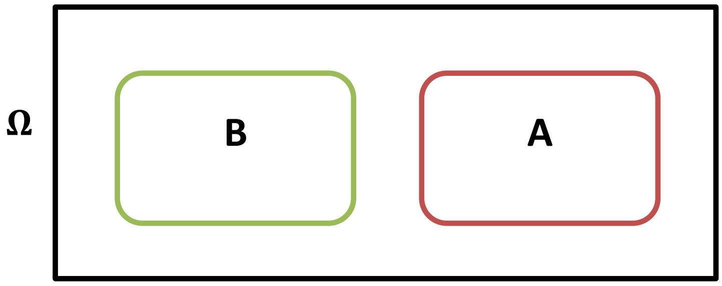
$\mathrm{A}=\{$نجاح الطالب في مقياس الاحصاء$\}$

$\overline{\mathrm{A}}=\{$رسوب الطالب في مقياس الاحصاء$\}$

$$p(\overline{A})=p(\Omega)-p(A)=1-0.75=0.25$$

4- قاعدة الجمع (أو ∪):

4-1: الأحداث المانعة (المتنافية): يقال أن الحدثين A و B مانعان أو متعارضان أو متنافيان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الأخر (أي لا يقعان معاً)، بمعنى إذا وقع الحدث A لا يقع الحدث B؛ أما إذا وقع الحدث B فلا يقع الحدث A. $A\cap B=\emptyset$



لحساب احتمال وقوع حدثان مانعان نستخدم القانون التالي:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$$

وبشكل عام إذا كانت $(A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 \ldots\ldots A_n)$ مجموعة من الحوادث المتنافية فإن احتمال اتحاد هذه الحوادث المتنافية يحسب بتطبيق القانون التالي:[1]

$$p(A_1\cup A_2\cup A_3\cup \ldots A_i)=p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)+\cdots+p(A_i)$$

مثال: في تجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحد، أحسب احتمال الحصول على عدد زوجي أو الحصول على عدد أقل من 2 ؟

---

[1]- أنظر في كل من:

- شفيق العتوم، **طرق الإحصاء تطبيقات اقتصادية وإدارية**، دار المنهاج للنشر والتوزيع، الأردن، 2006، ط 1، ص 207.

-Ronald E. Walpole And others, **Probability & Statistics for Engineers & Scientists,** Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, United States of America, 2012, p 57.

الحل: فضاء العينة: $\Omega = (1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6)$

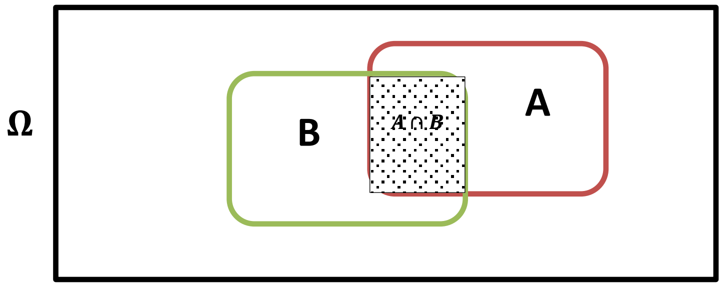
نفصل هذا الاحتمال إلى جزئيين: الجزء الأول هو احتمال الحصول على عدد زوجي A، والجزء الثاني الحصول على عدد أقل من 2 B.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} \qquad , \quad A = \{2\,,4\,,6\}$$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \qquad , \quad B = \{1\}$$

$$p(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} = p(A) + p(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = 2/3$$

2-4: الأحداث غير المتنافية: يقال أن الحدثين A و B غير مانعان أو غير متعارضان أو غير متنافيان إذا كان وقوع أحدهما لا يمنع وقوع الأخر (أي يقعان معاً)، بمعنى إذا وقع الحدث A يمكن أن يقع الحدث B؛ أما إذا وقع الحدث B يمكن أن يقع الحدث A. $A \cap B \neq \emptyset$



لحساب احتمال وقوع حدثان مانعان نستخدم القانون التالي:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - (A \cap B)$$

مثال: في تجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحد، أحسب احتمال الحصول على عدد زوجي أو الحصول على عدد أقل من 3؟

الحل: فضاء العينة: $\Omega = (1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6)$

نفصل هذا الاحتمال إلى جزئيين: الجزء الأول هو احتمال الحصول على عدد زوجي A، والجزء الثاني الحصول على عدد أقل من 3 B.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} \qquad , \quad A = \{2\,,4\,,6\}$$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} \qquad , \quad B = \{1, 2\}$$

$$p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \qquad , \quad (A \cap B) = \{2\}$$

$$p(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = 2/3$$

أما إذا كانت لدينا ثلاثة حوادث A ، B ، C غير متنافية مع بعضها البعض ، فإن احتمال اتحاد هذه الحوادث تكون بشكل التالي:[1]

$$p(A \cup B \cup C)$$
$$= p(A) + p(B) + p(C) - (A \cap B) - p(A \cap C)$$
$$- p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

5- قاعدة الضرب (و - ∩): في قاعدة ضرب الأحداث نميز بين نوعين أو صنفين من الأحداث: الإحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة، وهذا ما سوف نتطرق إليه في ما يلي:

5-1- الأحداث المستقلة: يقال بأن الحدثين A و B حدثان مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الآخر، أي إذا وقع الحدث A لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الحدث B؛ نفس الشيء فإن وقوع الحدث B لا يتأثر (لا يعتمد) بوقوع أو عدم وقع الحدث A.

ولحساب احتمال وقوع حدثان مستقلان نستخدم القانون التالي:

$$p(A \cap B) = p(A)\ .\ \ p(B)$$

ومنه فإن:

$$1)\ \mathbf{p(A / B) = p(A)}$$

$$2)\ \mathbf{p(B / A) = p(B)}$$

كما يمكن تعميم تلك العلاقة إذا كانت الحوادث $(A_1\ , A_2\ , A_3\ , \ldots\ldots A_i)$ مستقلة في ما بينها، كما أن وقوع أحد أو بعضها لا يؤثر بوقوع أو عدم موقع الحوادث الأخرى، ولحساب احتمال وقوعها معاً نطبق القانون التالي:[2]

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_i) = p(A_1)\ \ p(A_2)\, p(A_3) \ldots\ldots\ldots\ldots.\, p(A_i)$$

- من التجارب - الحوادث المستقلة:

1/ إطلاق نار على هدف معين من قبل صيادين (شخصين)؛

2/ سحب كرتين على التوالي من وعاء مع الإرجاع؛

[1] - Murray R. Spiegel And others, **Probability and statistics**, third edition,the Mcgraw-hill Companies, USA, 2013, p 6.

[2] - Gane Samb LO, **Mathematical Foundations of Probability Theory**, SPAS Books Series, Saint-Louis, Calgary, Alberta, 2018, p 20.

3/ في تجربة رمي زهرتي نرد، وليكن الحدثين: الحدث الأول هو نتيجة الرمية الأولى والحدث الثاني هو نتيجة الرمية الثانية؛

مثال: كيس يحتوي على 4 كرات بيضاء و 7 حمراء، فإذا أختار شخص كرتين من الكيس اختيارا عشوائيا فما احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء؟ (إذا كان السحب بإرجاع).

الحل: بفرض أن الحادثة B هي الحصول على الكرة البيضاء، أما الحادثة R هي الحصول على الكرة الحمراء. الحادثتين B و R مستقلتين وعليه فإن احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء هو:

$$\boldsymbol{p(B \cap R) = p(B)\ .\ p(R) = \frac{4}{11}\ .\ \frac{7}{11} = \frac{28}{121} = 0.231}$$

مثال: في تجربة رمي قطعتي نقود؛ فما احتمال الحصول على الصورة في القطعة الأولى والصورة في القطعة الثانية؟

ليكن الحدث A الظهور الصورة في القطعة الأولى، و الحدث B ظهور الصورة في القطعة الثانية:

S={HH , HT , TH , TT } ,   n(s) = 4 عدد عناصر فضاء العينة

$$A = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}\}\ ,\quad B = \{\mathrm{HH}, \mathrm{TH}\}\ ,\quad p(A) = \frac{2}{4}\ ,\quad p(B) = \frac{2}{4}$$

$$p(A \cap B) = p(A)\ .\ p(B) = \frac{2}{4}\ .\frac{2}{4} = 0.5\ .\ \ 0.5 = 0.25$$

مثال: يطلق شخصان A و B طلقة نارية باتجاه هدف معين، إذا كان احتمال أن يصيب A الهدف هو 0.8 واحتمال أن يصيبه الشخص الثاني B هو 0.7 ، إذا اعتبرنا أن A و B مستقلين:

1/ ما هو احتمال أن الهدف يصاب من طرف شخص على الأقل؟

2/ أوجد احتمال أن الهدف يصاب من طرف شخص على الأكثر؟

3/ أوجد احتمال أن لا يصاب الهدف من طرف الشخصان؟

الحل:

$p(A) = 0.8$ اصابة الهدف من طرف ,$p(\bar{A}) = 0.2$ عدم اصابة الهدف من طرف

$p(B) = 0.7$ اصابة الهدف من طرف ,$p(\bar{B}) = 0.3$ عدم اصابة الهدف من طرف

الحالات الكلية الممكنة هي:

$$\mathbf{E} = \{\bar{A} \cap \bar{B}\ \ , A \cap \bar{B}\ , \bar{A} \cap B\ , A \cap B\}$$

$$\mathbf{1)}\quad \boldsymbol{p(E_1) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) + p(A \cap B)}$$

$$\boldsymbol{= p(A).p(\bar{B}) + p(\bar{A}).p(B) + p(A).p(B)}$$

$$\boldsymbol{= (0.8).(0.3) + (0.2).(0.7) + (0.8).(0.7) = 0.94}$$

$$2)\ \ p(E_2) = p(\bar{A} \cap \bar{B}\ ) + p(A \cap \bar{B}\ ) + p(\bar{A} \cap B)$$
$$= p(\bar{A}).p(\bar{B}) + p(A).p(\bar{B}) + p(\bar{A}).p(B)$$
$$= (0.2).(0.3) + (0.8).(0.3) + (0.2).(0.7) = 0.44$$
$$3)\ \ p(E_3) = p(\bar{A} \cap \bar{B}\ ) = p(\Omega) - p(E_1) = p(\bar{A}).p(\bar{B}) = (0.2).(0.3)$$
$$= 0.06 = 1 - 0.94 = 0.06$$

2-5: الأحداث غير المستقلة: يقال بأن الحدثين A و B حدثان غير مستقلان إذا كان وقوع أحدهما يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الآخر، أي إذا وقع الحدث A يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الحدث B؛ نفس الشيء فإن وقوع الحدث B يتأثر (يعتمد) بوقوع أو عدم وقع الحدث A.

ولحساب احتمال وقوع حدثان غير مستقلان نستخدم القانون التالي:[1]

$$p(A \cap B) = p(A)\ .\ \ p(B/A) \qquad \text{أو}$$
$$p(A \cap B) = p(B)\ .\ \ p(A/B)$$

مثال: كيس يحتوي على 4 كرات بيضاء و 7 حمراء، فإذا أختار شخص كرتين من الكيس اختيارا عشوائيا فما احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء؟ (إذا كان السحب بدون إرجاع).

الحل: بفرض أن الحادثة B هي الحصول على الكرة البيضاء، أما الحادثة R هي الحصول على الكرة الحمراء. الحادثتين B و R غير مستقلتين وعليه فإن احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء هو:

$$p(B \cap R) = p(B)\ .\ \ p(R/B) = \frac{4}{11}\ \ .\ \ \frac{7}{10} = \frac{28}{110} = 0.254$$

6- الإحتمال الشرطي: في العديد من التجارب يتأثر الاحتمال الذي يخصص لحادثة ما (المراد حسابها) ولتكن A بالمعلومة عن وقوع أو حدوث حادثة اخر ولتكن B. ونستخدم العبارة التالية ما احتمال وقع الحادثة A بشرط وقوع الحادثة B. والذي يسمى بالاحتمال الشرطي ويرمز له بالرمز $p(\ \ /B)$ ويقرأ احتمال وقوع A بشرط وقوع B. أو العكس في حالة حساب احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحدث A وتكتب بالصيغة التالية $p(\ \ /A)$ ولحساب الاحتمال الشرط نستخدم العلاقة التالية:[2]

1- Michael Evans and Jeffrey Rosenthal, **Probability and Statistics,** Second Edition, University of Toronto, canada, 2009, p 21.

2- Prasanna Sahoo**, Probability and Mathmatical statistics**, Department of Mathematics University of Louisville, KY 40292 USA, 2008, pp 27-28.

$$\mathbf{p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}} \quad , \quad \mathbf{p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}}$$

$p(A/B)$: احتمال وقع الحدث A علماً بأن الحدث B قد وقع ، A هو الحدث المطلوب حسابه، أما B فهو الحدث المعلوم وقيمته هي $\mathbf{p(B)}$ ، أما $(/)$ هي إشارة – علامة الشرط، و $\mathbf{p(A\cap B)}$ هو احتمال التقاطع بين الحدثين A و B.

$\mathbf{p(B/A)}$: احتمال وقع الحدث B علماً بأن الحدث A قد وقع ، B هو الحدث المطلوب حسابه، أما A فهو الحدث المعلوم وقيمته هي $p(A)$ ، أما $(/)$ هي إشارة – علامة الشرط، و $p(A\cap B)$ هو احتمال التقاطع بين الحدثين A و B.

مثال: لتكن لدينا خمسة مائة طالب بقسم علوم التسيير بجامعة البليدة 2، بحيث الجدول التالي يوضح مستوى ضغط الدم و حسب عادة التدخين، كما يلي:

	C ضغط دم مرتفع	D ضغط دم متوسط	E ضغط دم منخفض	المجموع
A يدخن	90	70	40	200
B لا يدخن	160	80	60	300
المجموع	250	150	100	500

ولتكن التجربة هي اختيار طالب بشكل عشوائي، المطلوب إيجاد الاحتمالات التالية:

1/ حساب احتمال أن يكون الطالب ضغط دمعه منخفض؟

2/ حساب احتمال أن يكون الطالب لا يدخن؟

3/ حساب احتمال أن يكون الطالب ضغط دمه منخفض و لا يدخن؟

4/ حساب احتمال أن يكون الطالب ضغط دمه منخفض أو لا يدخن؟

5/ حساب احتمال أن يكون الطالب ضغط دمه منخفض علماً بأنه يدخن؟

الحل:

$$1)\ p(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}=\frac{100}{500}=\frac{1}{5}=0.2$$

$$2)\ p(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{300}{500}=\frac{3}{5}=0.6$$

$$3)\ p(E\cap B)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}.\frac{n(B)}{n(\Omega)}=p(E).p(B)=(0.2).(0.6)=0.12$$

$$4)\ p(E\cup B)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}+\frac{n(B)}{n(\Omega)}-\frac{n(E\cap B)}{n(\Omega)}=p(E)+p(B)-p(E\cap B)$$

$$=(0.2)+(0.6)-0.12=0.68$$

$$p(E/B)=\frac{p(E\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{n(E\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}=\frac{n(E\cap B)}{n(\Omega)}.\ \frac{n(\Omega)}{n(\mathrm{B})}=\frac{n(E\cap B)}{n(B)}=\frac{60}{300}$$

$$=\frac{0.12}{0.6}=0.2$$

مثال : في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاثة مرات متتالية، فإذا علمت بأن نتيجة الرمية الأولى والثانية هي الرقم، فما احتمال أن تكون نتيجة الرمية الثالثة رقم؟

الحل: فضاء العينة هو:

S={HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT,TTH, TTT}, n(s) = 8 عدد عناصر فضاء العينة

$A=\{$نتيجة الرمية الأولى والثانية هي الرقم$\}=\{\mathrm{TTH}\,,\mathrm{TTT}\}\quad p(A)=2/8$

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{1/8}{2/8}=1/2$$

مثال: بكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير قسم علوم التسيير السنة الأولى جذع مشترك، نجح 80% من الطلبة في مقياس المحاسبة العامة ونجح 90% من الطلبة في مقياس المنهجية ونجح 60% من الطلبة في مقياسين المحاسبة والمنهجية، إذا تم اختيار أحد الطلبة بطريقة عشوائية من قسم علوم التسيير، المطلوب:

1/ إذا كان ناجحا في المنهجية ما هو احتمال أن يكون ناجحا في المحاسبة؟

2/ إذا كان ناجحا في المحاسبة فما هو احتمال أن يكون ناجحا في المنهجية؟

الحل: لنعرف الحوادث التالية:

$\mathbf{A}=\{$نجاح الطالب في مقياس المحاسبة العامة$\}\ ,\qquad \boldsymbol{p(A)=0.8}$

$\boldsymbol{B}=\{$نجاح الطالب في مقياس المنهجية$\}\qquad ;\qquad \boldsymbol{p(B)=0.9}$

$A\cap B=\{$ نجاح الطالب في المحاسبة و المنهجية $\}\ ,\ p(A\cap B)=0.6$

$$\mathbf{1)}\quad \mathbf{p(A/B)}=\frac{\mathbf{p(A\cap B)}}{\mathbf{p(B)}}=\frac{\mathbf{0.6}}{\mathbf{0.9}}=\mathbf{0.666}$$

$$\mathbf{2)}\quad \boldsymbol{p}\mathbf{(B/A)}=\frac{\mathbf{p(A\cap B)}}{\mathbf{p(A)}}=\frac{\mathbf{0.6}}{\mathbf{0.8}}=\mathbf{0.75}$$

7- الاحتمال الكلي

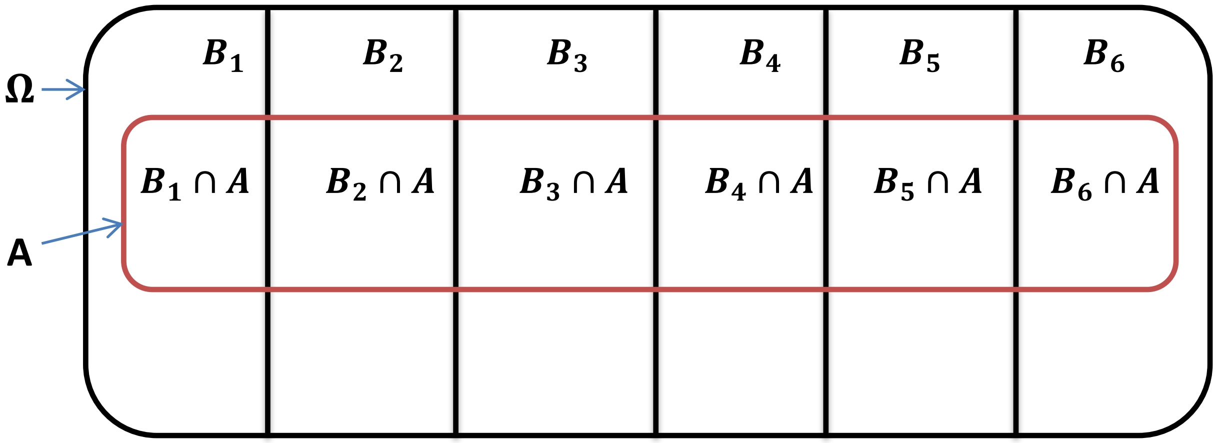
إذا كان لدينا **n** من الحوادث المتنافية أي مانعها لبعضها البعض وهي $(B_1، B_2، B_3 ، B_4، \dots B_n)$ ضمن فضاء العينة (Ω) بحيث أن اتحادها هو Ω (أحداث مانعة وشاملة)، علما بأن:

$$[p(B_i) > 0 \ \forall_i \qquad , \ i = 1 , 2 , 3 , 4 , \dots \dots . . n]$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad , \quad \forall \ i \neq j$$

وإذا كان الحدث A من فراغ العينة Ω بحيث وقع هذا الحدث لا يتحقق إلا بوقوع أحد الحوادث $(B_1، B_2، B_3 ، \dots B_n)$، فإن وقوع الحدث B يعني وقوع أحد الحوادث الشاملة والمتنافية التالية:

$$(A \cap B_1 \ ، A \cap B_2 ، \ A \cap B_3 ، \ \dots A \cap B_n)$$



يتضح من خلال الشكل فن **(venn)** أعلاه بأن الحادثة A هي عبارة عن اتحاد تقاطعات الحوادث المتنافية

$$A = [(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A) \cup (B_4 \cap A) \cup (B_5 \cap A) \cup (B_6 \cap A)]$$

ولحساب احتمال وقوع الحدث A نقوم بأخذ الاحتمال للطرفين للصيغة السابقة، نحصل على:

$$p(A) = p[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A) \cup (B_4 \cap A) \cup (B_5 \cap A) \cup (B_6 \cap A)]$$
$$= p(B_1 \cap A) + p(B_2 \cap A) + p(B_3 \cap A) + p(B_4 \cap A) + p(B_5 \cap A) + p(B_6 \cap A)$$

بالرجوع إلى قانون الاحتمال الشرط :

$$p(A/B_i) = \frac{p(A \cap B_i)}{p(B_i)}$$

$$p(A/B_i).p(B_i) = p(A \cap B_i)$$

ومنه يصبح قانون الاحتمال الكلي بالشكل التالي:[1]

$$\boldsymbol{p(A)} = \mathbf{p(A/B_1).p(B_1) + p(A/B_2).p(B_2) + p(A/B_3).p(B_3) + p(A/B_4).p(B_4) + p(A/B_5).p(B_5) + p(A/B_6).p(B_6)}$$

$$\boldsymbol{p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i)\ .\ p(A/B_i)}$$

مثال: تنتج ثلاثة ماكينات المنتوجات التالية B_1 ، B_2 ، $\boldsymbol{B_3}$ بحيث تقدر نسبة الإنتاج لكل ماكنة على التوالي 40% ؛ 35 % ؛ 25% من الإنتاج الكلي للمصنع، وإن نسبة الإنتاج غير المعيب (السليم) لهذه الماكينات هي 98% ؛ 97%؛ 96%، فإذا اختيرت وحدة واحدة بطريقة عشوائية، فما احتمال أن تكون سليمة؟

الحل: لنعرف الحوادث التالية:

$B_1 = \{\text{إنتاج الماكنة الأولى}\}$, نسبة الإنتاج $p(B_1) = 0.4$

$B_2 = \{\text{إنتاج الماكنة الثانية}\}$, نسبة الإنتاج $p(B_2) = 0.35$

$B_3 = \{\text{إنتاج الماكنة الثالثة}\}$, نسبة الإنتاج $p(\boldsymbol{B_3}) = 0.25$

$S = \{\text{إنتاج سليم}\}$

نسبة الإنتاج السليم علماً بأنه من إنتاج الماكنات A ، B ، C على الترتيب:

$$\boldsymbol{p(S/B_1) = 0.98} \quad , \quad \boldsymbol{p(S/B_2) = 0.97} \quad , \quad \boldsymbol{p(S/B_3) = 0.96}$$

وعليه يمكن حساب الاحتمال للإنتاج السليم كما يلي:

$$\boldsymbol{p(S) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i)\ .\ p(S/B_i)}$$

$$\boldsymbol{p(S)} = \mathbf{p(S/B_1).p(B_1) + p(S/B_2).p(B_2) + p(S/B_3).p(B_3)}$$

$$\boldsymbol{p(S) = (0.98)(0.4) + (0.97)(0.35) + (0.96)(0.25) = 0.9715}$$

[1] - Michael Evans and Jeffrey Rosenthal, , p 21.

8- نظرية بايز($Bayes$ Theorem) :

تعنى نظرية بايز بتطوير طريقة تقدير الاحتمالات واستخدامها في اتخاذ القرارات الإدارية في ظروف عدم التأكيد، وتتكون هذه النظرية أساسا من طريقة أو أسلوب الاحتمال الشرطي، وأطلق على هذا الأسلوب اسم نظرية بايز نسبة إلى مكتشفها توماس بايز $\boldsymbol{Thomas\ Bayes}$ والذي عاش في الفترة (1761-1702).[1]

والقاعدة الأساسية لتحليل بايز هي أنه يمكن استخدام معلومات إضافية (إذا أُتيحت) في تغيير –تحسين- الاحتمالات الهامشية لحدوث الحدث، ويشار إلى الاحتمالات المعدلة بأنها احتمالات مراجعة أو معدلة أو لاحقة (بعدية).[2] إن نظرية بايز تعنى بحساب احتمال أن يكون سبباً محدداً من مجموعة من الأسباب هو مصدر حدوث هذه الحادثة والتي نعلم مسبقاً بحدوثها، وبالرجوع إلى ما سبق الاحتمال الكلي.

لتكن $\left(B_1، B_2، B_3 ، B_4، \dots B_n\right)$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى ضمن فضاء العينة $(\boldsymbol{\Omega})$ بحيث أن اتحادها هو $\boldsymbol{\Omega}$ (أحداث مانعة وشاملة)، علما بأن:

$$[p(B_i) > 0 \ \ \forall_i \qquad , \ \ i = 1\,,2\,,3\,,4\,,\dots\dots..n]$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad , \quad \forall\, i \neq j$$

وليكن الحدث A من $\boldsymbol{\Omega}$ والذي لا يتحقق إلا بوقوع احد الحوادث $\left(B_1، B_2، B_3 ، B_4، \dots B_n\right)$ فالاحتمال $p(A)$ يمثل مجموع الأسباب التي تؤدي إلى وقوع الحدث A، فنظرية بايز تهتم بحساب احتمال تسبب أحد الأسباب على مجموع الأسباب، بمعنى أخر نقوم بقسمة أحد صور الاحتمال الكلي على الاحتمالي الكلي.

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i)\,.\ p(A/B_i)$$

لنطرح السؤال التالي: أنه إذا علماً بحدوث A فما هو احتمال أن يكون سبب حدوثه هو B_i ؟

وللإجابة على هذا التساؤل نستعين بالصيغة القانوني للاحتمال الكلي والاحتمال الشرطي، لكي نحصل على الصيغة النهائية لقانون بايز:

$$(\mathrm{B}_i/A) = \frac{(B_i \cap A)}{p(A)}$$

مما سبق لدينا $$\mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{B}_i) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_i)}{\mathrm{p}(\mathrm{B}_i)}$$

---

[1]- شفيق العتوم، مرجع سابق، ص 211.
[2]- برنارد تايلور الثالث، تعريب سرور علي ابراهيم سرور، **مقدمة في علم الإدارة**، دار المريخ، الرياض، 2007، ص 661.

$$\mathbf{p(A/B_i).p(B_i) = p(A \cap B_i)}$$

ومنه تصبح قاعدة بايز $(Bayes)$ بالشكل التالي:[1]

$$\mathbf{(B_i/A) = \frac{p(A/B_i).p(B_i)}{p(A)}}$$

ومنه يمكن القول بأن نظرية بايز تهتم بكيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية $(\mathbf{B_i}/A)$ تشكل مجموعة كلية ومرافقة لحدوث الحدث A.

مثال: بالرجوع إلى المثال السابق للاحتمال الكي، إذا كانت الوحدة المسحوبة بطريقة عشوائية، فما احتمال أن تكون من إنتاج الماكنة الثانية؟

الحل: لدينا معلومة بوقوع الحدث A وهو وحدة سليمة، فاحتمال أنها من إنتاج الماكنة الثانية هي $(\mathbf{B_2}/A)$

$$\mathbf{(B_2/A) = \frac{p(A/B_2).p(B_2)}{p(A)} = \frac{(0.97).(0.35)}{0.9715} = 0.34946}$$

مثال: تم إحصاء عدد الطلبة الناجحين والراسبين في أربعة تخصصات لسنة الثالثة بقسم علوم التسيير بجامعة البليدة 2، عدد الطلبة ونسبة النجاح هي: إدارة الأعمال تضم 250 طالب نسبة النجاح 90%؛ الموارد البشرية تضم 200 طالب ونسبة النجاح 95%؛ أما في تخصص إدارة العمومية عدد الطلبة 150 نسبة النجاح 97%؛ وفي تخصص المالية عدد الطلبة 100 طالب ونسبة النجاح 98%.

اختير طالب بصفة عشوائية، أوجد الاحتمالات التالية:

1/ ما احتمال أن يكون الطالب المختار راسباً؟

2/ إذا علمت بأن الطالب راسباً ما احتمال أن يكون من تخصص إدارة الأعمال؟

الحل: لنفرض الحوادث $(B_4 ، B_3 ، B_2 ، B_1)$ التالية لتمثل:

$B_1 = ($عدد الطلبة في إدارة الأعمال$)$ $\quad p(B_1) = \frac{250}{700} = 0.357$

$B_2 = ($عدد الطلبة في الموارد البشرية$)$ $\quad p(B_2) = \frac{200}{700} = 0.286$

$B_3 = ($عدد الطلبة في الإدارة العمومية$)$ $\quad p(B_3) = \frac{150}{700} = 0.214$

$B_4 = ($عدد الطلبة في المالية$)$ $\quad p(B_4) = \frac{100}{700} = 0.143$

[1] -A.G. Frodesen , O. Skjeggestad, **probability and statistics in particle physics,** Columbia University Press, Norway, 1979, p p 26-27.

$A = \{\text{طالب راسب}\}$

$p(A/B_1) = 1 - 0.9 = 0.1$

$p(A/B_2) = 1 - 0.95 = 0.05$

$p(A/B_3) = 1 - 0.97 = 0.03$

$p(A/B_4) = 1 - 0.98 = 0.02$

حساب الإحتمال الكلي
$$\boldsymbol{p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i)\,.\,p(A/B_i)}$$

$$\boldsymbol{p(A) = p(A/B_1).\,p(B_1) + p(A/B_2).\,p(B_2) + p(A/B_3).\,p(B_3) + p(A/B_4).\,p(B_4)}$$

$$\mathbf{p(A) = (0.1)(0.357) + (0.05)(0.286) + (0.03)(0.214) + (0.02)(0.143)}$$

$p(A) = 0.05928$

ج 2/ احتمال أن يكون الطالب من تخصص إدارة الأعمال علماً أنه راسباً؟

$$\boldsymbol{(B_1/A) = \frac{p(A/B_1).\,p(B_1)}{p(A)} = \frac{(0.1)(0.357)}{0.05928} = 0.602}$$

تمارين الفصل الثاني

التمرين 01: في تجربة إلقاء قطعة النقود ثلاثة مرات متتالية، أكتب فضاء العينة، ثم ما احتمال الحصول على الصورة في الرمية الأولى أو الحصول على الصورة في الرمية الثالثة؟

التمرين 02: في مدينة ما إطفائيتان تعملان مستقلتين عن بعضهما البعض، احتمال وصول الأولى إلى مكان الحريق خلال خمس دقائق 0.95، واحتمال وصول الثانية إلى نفس المكان في نفس المدة 0.9، ما احتمال وصول الإطفائيتين معاً إلى مكان الحريق خلال خمس دقائق؟

التمرين 03: في تجربة رمي قطعة نقود مرتين، ما احتمال الحصول على الصورة في الرمية الأولى و الرقم في الرمية الثانية؟ (اختبر نفسك)

التمرين 04: في تجربة رمي قطعة نقود ثلاثة مرات متتالية: أحسب احتمال الحصول على الصورة في الرمية الأولى والحصول على الرقم في الرمية الثانية والحصول على الرقم في الرمية الثالثة؟

- وما احتمال الحصول على الرقم في الرمية الأولى والحصول على الرقم في الرمية الثانية والحصول على الصورة في الرمية الثالثة؟

التمرين05: صندوق به عشرة كرات منها 4 بيضاء و6 حمراء، إذا سحبت كرتان ما احتمال:

1/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء، بدون إرجاع؟

2/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء، مع الإرجاع؟

3/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية بيضاء، بدون إرجاع؟

4/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية بيضاء، مع الإرجاع؟

5/ أن تكون الكرتان من نفس اللون، بدون إرجاع؟

6/ أن تكون الكرتان من نفس اللون، مع الإرجاع؟

في حالة سحب ثلاثة كرات فما احتمال الحصول:

7/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة حمراء، مع الإرجاع ؟

8/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة حمراء، بدون إرجاع ؟

التمرين 06: وعاء يحتوي على 10 كرات متماثلة تماماً باستثناء أن 5 منها حمراء و 3 زرقاء و 2 خضراء، سحبت كرة من الوعاء، ما هو احتمال أن تكون:

1/ حمراء؟ 2/ زرقاء؟ 3/ خضراء؟ 4/ ليست زرقاء؟ 5/ ليست خضراء؟ 6/ خضراء أو ليست خضراء؟

التمرين 07: ليكن لدينا الحدثين A و B من فضاء العينة (Ω) حيث أن:

$$p(A) = \frac{3}{8} \quad , \quad p(B) = \frac{1}{2} \quad , \quad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

المطلوب: حساب الاحتمالات التالية:

$$p(A \cup B)\ ,\ p(\bar{A})\ \ ,\ p(\bar{B})\ ,\ p\ (\bar{A} \cap \bar{B}),\ p(\overline{A \cap B})\ ,\ p(A/B),\ p(B/A)\ ,$$
$$p(A \cap B/B)$$

التمرين 08: ثلاثة من الأشخاص يتنافسون على إصابة طائر (عصفور) فوق الشجرة، مع العلم بأن احتمالات إصابة الطائر لكل شخص على التوالي:

$$p(A) = 0.65\quad ,\quad p(B) = 0.7\quad ,\quad p(C) = 0.95$$

المطلوب:

1/ ما احتمال إصابة الهدف من الشخص الأول فقط؟

2/ ما احتمال إصابة الهدف من طرف شخص على الأقل؟

3/ ما احتمال إصابة الهدف من طرف شخصين على الأقل؟

4/ ما احتمال اصابة الهدف من طرف ثلاثة الأشخاص معاً؟

5/ ما احتمال اصابة الهدف من طرف شخصين على الأكثر؟

6/ ما احتمال اصابة الهدف من طرف شخص على الأكثر؟

7/ ما احتمال اصابة الهدف من الشخص الثاني على الأكثر؟

8/ ما احتمال عدم اصابة الهدف؟

التمرين 09: إذا كان احتمال أن يصيب شخص هدف معين في كل طلقة يطلقها يساوي 0.65، فإذا أطلق خمسة طلقات على الهدف، فما احتمال:

1/ ما احتمال عدم إصابة الهدف؟

2/ ما احتمال إصابة الهدف مرة واحدة فقط؟

3/ احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر؟

4/ احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل؟

التمرين 10: أطلق صيادان النار على هدف معين، إذا أطلق كل منهما طلقة واحدة، وكان احتمال إصابة الأول للهدف هو 0.65 وإصابة الثاني للهدف هو 0.7، فما احتمال:

1/ أن يصاب الهدف من طرف الشخصين؟

2/ وأن يصاب الهدف من طرف شخص واحد فقط؟

3/ أن يصاب الهدف من طرف الشخص الثاني على الأكثر؟

4/ أن لا يصاب الهدف؟

التمرين 11: في تجربة رمي زهرتي نرد، أوجد فراغ العينة، وحساب احتمالات التالية:

1/ ما احتمال الحصول نفس النتيجة في قطعتي النرد؟

2/ احتمال الحصول على عدد فردي في

3/ ما احتمال الحصول على عددين الفرق بينهما يساوي الواحد؟

4/ ما احتمال الحصول على مجموع النتيجتين أكبر أو يساوي 9؟

5/ ما احتمال الحصول على حاصل ضرب النتيجتين أقل أو يساوي 6؟

التمرين 12: تبلغ نسبة الوحدات المعيبة من انتاج آلة 10% فإذا سحب عينة عشوائية مكونة من أربعة وحدات من إنتاج وحدات من انتاج هذه الآلة فأوجد احتمال أن:

1/ أن تكون منها وحدتين معيبتين؟

2/ أن تكون منها وحدة معيبة واحدة على الأقل؟

3/ أن تكون كلها معيبة؟

التمرين 13: ليكن الحدثين A و B من فراغ العينة Ω ، فإذا كانت احتمالات التالية:

$$p(A \cup B) = \frac{4}{5} \quad , \quad p(A) = \frac{1}{4} \ , \ p(B) = \frac{3}{5}$$

المطلوب: حساب الاحتمالات التالية:

1/ احتمال وقوع A و B معاً؟

2/ احتمال وقوع A فقط؟

3/ احتمال وقوع احد الحدثين فقط؟

4/ احتمال وقوع احد الحدثين على الأكثر؟

التمرين 14: ليكن لديك الحدثين A و B المستقلين من فراغ العينة Ω، المطلوب:

1/ برهن أن الحدثين $(\bar{A}$ و $\bar{B})$مستقلين كذلك؟

2/ أوجد الاحتمال التالي: $(p(\bar{A}/\bar{B}))$؟

التمرين 15: تشتري إحدى الشركات الصناعية لسيارات نوع معين من القطع التي تدخل في إنتاج منتجات الشركة؛ من الموردين A، B ، C، نسبة إمداد من الموردين هي على التوالي: 55% ، 30 % ، 15%، بحيث تختلف جودة القطع (الأجزاء) بين الموردين، وهي على الترتيب 2 % ، 1% ، 0.95% نسب معدلات المعيب.

1/ تم سحب بطريقة عشوائية وحدة واحدة من إنتاج الشركة، فما احتمال أن يكون بها عيب في أحد أجزائها التي أمدها بها الموردين A، B ، C؟

2/ إذا كانت الوحدة بها عيب فما احتمال أن تكون من المورد الثالث؟

التمرين 16: صندوقان يحتوي الأول على سبعة كرات حمراء و ثلاثة كرات خضراء، أما الصندوق الثاني يحتوي على أربعة كرات حمراء وخمسة كرات خضراء، اختير أحد الصناديق عشوائياً وسحبت منه كرة بطريقة عشوائية.

المطلوب: 1/ ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة خضراء؟

2/ إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء، فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الثاني؟

التمرين 17: تقدم ثلاثة أشخاص A، B ، C إلى ثلاثة وظائف مختلفة، احتمال أن يكسب A الوظيفة هو 0.75 ؛ واحتمال أن يكسب B الوظيفة هو 0.6، واحتمال أن يكسب C الوظيفة هو 0.55.

المطلوب: 1/ ما هو احتمال أن الثلاثة يحصلون على الوظائف؟

2/ عدم تعيين أي واحد في الوظيفة؟

3/ واحد فقط يحصل على الوظيفة؟

4/ على الأكثر الشخص الثالث يحصل على الوظيفة؟

حلول تمارين الفصل الثاني

حل التمرين01: فضاء العينة في تجربة رمي قطعة نقود ثلاثة مرات هي:

S={HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT,TTH, TTT}, n(s) = 8عدد عناصر فضاء العينة

$$A(\text{الحصول على الصورة في الرمية الأولى}) = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}, \qquad p(A) = \frac{4}{8}$$

$$B(\text{الحصول على الصورة في الرمية الثالثة}) = \{HHH, HTH\ , THH, TTH\}, \qquad p(B) = \frac{4}{8}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

حل التمرين 02:

إحتمال وصول الإطفائية الأولى خلال خمس دقائق $\boldsymbol{p(A) = 0.95}$

إحتمال وصول الإطفائية الثانية خلال خمس دقائق $\mathbf{p(B) = 0.9}$

بما أن إطفائيتين تعملان بصفة مستقلة أي مستقلتين، فما احتمال وصول الإطفائيتين إلى نفس المكان في نفس المدة؟

$$p(A \cap B) = p(A)\ .\ p(B) = (0.95).(0.9) = 0.855$$

حل التمرين 05:

احتمال الحصول كرة بيضاء $p(B) = \frac{4}{10}$

احتمال الحصول كرة حمراء $p(R) = \frac{6}{10}$

ج 1/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء، بدون إرجاع؟ الحدثين غير مستقلان.

$$1)\quad p(B \cap R) = p(B).p(R/B) = \frac{4}{10}\ .\frac{6}{9} = \frac{24}{90} = 0.266$$

ج 2/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء، مع الإرجاع؟ الحدثين مستقلان.

$$2)\quad p(B \cap R) = p(B).p(R) = \frac{4}{10}\ .\frac{6}{10} = \frac{24}{100} = 0.24$$

ج 3/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية بيضاء، بدون إرجاع؟ الحدثين غير مستقلان.

$$3)\quad p(B_1 \cap B_2) = p(B_1).p(B_2/B_1) = \frac{4}{10}\ .\frac{3}{9} = \frac{12}{90} = 0.133$$

ج 4/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية بيضاء، مع الإرجاع؟ الحدثين مستقلان.

$$4)\quad p(B_1 \cap B_2) = p(B_1).p(B_2) = \frac{4}{10}\ .\frac{4}{10} = \frac{16}{100} = 0.16$$

ج 5/ أن تكون الكرتان من نفس اللون، بدون إرجاع؟ الحدثين غير مستقلان.

$$5)\ p(s) = p[(B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)] = p(B_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap R_2)$$

$$= p(B_1).p(B_2/B_1) + p(R_1).p(R_2/R_1) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} + \frac{6}{10}\ .\frac{5}{9} = \frac{42}{90}$$

$$= 0.466$$

ج 6/ أن تكون الكرتان من نفس اللون، مع الإرجاع؟ الحدثين مستقلان.

$$6)\ p(s) = p[(B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)] = p(B_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap R_2)$$

$$= p(B_1).p(B_2) + p(R_1).p(R_2) = \frac{4}{10}.\frac{4}{10} + \frac{6}{10}\ .\frac{6}{10} = \frac{52}{100} = 0.52$$

* في حالة سحب ثلاثة كرات فما احتمال الحصول:

ج 7/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة حمراء، مع الإرجاع ؟ الحوادث مستقلة

$$7)\quad p(B \cap R \cap R) = p(B).p(R).p(R) = \frac{4}{10}\ .\frac{6}{10}.\frac{6}{10} = \frac{144}{1000} = 0.144$$

ج 8/ أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة حمراء، بدون إرجاع ؟ الحوادث غير مستقلة

$$8)\ p(B \cap R \cap R) = p(B_1).p(R_2/B_1).p(R_3/B_1 \cap R_2) = \frac{4}{10}\ .\frac{6}{9}.\frac{5}{8} = \frac{1}{6} = 0.166$$

حل التمرين 08:

$$\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p\ p(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}}$$

$$\boldsymbol{p(\bar{A}) = p(\Omega) - p(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}}$$

$$\boldsymbol{p(\bar{B}) = p(\Omega) - p(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{p\ (\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = p(\Omega) - p(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}}$$

$$\boldsymbol{p(\overline{A \cap B}) = p(\Omega) - p(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}}$$

$$\boldsymbol{p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{p(B/A) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}}$$

$$p(A\cap B/B) = \frac{\mathrm{p}[(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cap\mathrm{B}]}{\mathrm{p}(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{p}(\mathrm{B})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

حل التمرين 09: أحدث إطلاق النار باتجاه الطائر للأشخاص الثلاثة هي حوادث مستقلة:

$$\boldsymbol{p(A) = 0.65 \quad , \quad p(B) = 0.7 \quad , \quad p(C) = 0.95}$$

ومنه فإن احتمالات عدم إصابة الهدف من طرف الأشخاص الثلاثة هي على الترتيب:

$$\boldsymbol{p(\bar{A}) = 0.35 \quad , \quad p(\bar{B}) = 0.3 \quad , \quad p(\bar{C}) = 0.05}$$

الحالات الكلية الممكنة هي:

$$\boldsymbol{\mathrm{E} = \{\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\ ,\quad A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\ ,\quad \bar{A}\cap B\cap\bar{C}\ ,\quad \bar{A}\cap\bar{B}\cap C\ ,}$$
$$\boldsymbol{A\cap B\cap\bar{C}\ ,\quad A\cap\bar{B}\cap C\ ,\quad \bar{A}\cap B\cap C\ ,\quad A\cap B\cap C\}}$$

1) $\boldsymbol{p(E_1) = p(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}) = p(A).p(\bar{B}).p(\bar{C}) = (0.65).(0.3).(0.05)}$

$\boldsymbol{= 0.00975}$

2) $\boldsymbol{p(E_2) = p(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}) + p(\bar{A}\cap B\cap\bar{C}) + p(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C) + p(A\cap B\cap\bar{C})}$

$\boldsymbol{+ p(A\cap\bar{B}\cap C) + p(\bar{A}\cap B\cap C) + p(A\cap B\cap C)}$

$\boldsymbol{= p(A).p(\bar{B}).p(\bar{C}) + p(\bar{A}).p(B).p(\bar{C}) + p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(C)}$

$\boldsymbol{+ p(A).p(B).p(\bar{C}) + p(A).p(\bar{B}).p(C) + p(\bar{A}).p(B).p(C)}$

$\boldsymbol{+ p(A).p(B).p(C)}$

$\boldsymbol{= (0.65).(0.3).(0.05) + (0.35).(0.7).(0.05)}$

$\boldsymbol{+ (0.35).(0.3).(0.95) + (0.65).(0.7).(0.05)}$

$\boldsymbol{+ (0.65).(0.3).(0.95) + (0.35).(0.7).(0.95)}$

$\boldsymbol{+ (0.65).(0.7).(0.95) = 0.99475}$

3) $\boldsymbol{p(E_3) = p(A\cap B\cap\bar{C}) + p(A\cap\bar{B}\cap C) + p(\bar{A}\cap B\cap C) + p(A\cap B\cap C)}$

$\boldsymbol{= p(A).p(B).p(\bar{C}) + p(A).p(\bar{B}).p(C) + p(\bar{A}).p(B).p(C)}$

$\boldsymbol{+ p(A).p(B).p(C)}$

$\boldsymbol{= (0.65).(0.7).(0.05) + (0.65).(0.3).(0.95)}$

$\boldsymbol{+ (0.35).(0.7).(0.95) + (0.65).(0.7).(0.95) = 0.873}$

$$4)\ p(E_4) = p(A \cap B \cap C) = p(A).p(B).p(C) = (0.65).(0.7).(0.95) = 0.43225$$

$$5)\ p(E_5) = p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(\bar{C}) + p(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + p(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + p(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) + p(A \cap B \cap \bar{C}) + p(A \cap \bar{B} \cap C) + p(\bar{A} \cap B \cap C)$$

$$= p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(\bar{C}) + p(A).p(\bar{B}).p(\bar{C}) + p(\bar{A}).p(B).p(\bar{C}) + p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(C) + p(A).p(B).p(\bar{C}) + p(A).p(\bar{B}).p(C) + p(\bar{A}).p(B).p(C)$$

$$= (0.35).(0.3).(0.05) + (0.65).(0.3).(0.05) + (0.35).(0.7).(0.05) + (0.35).(0.3).(0.95) + (0.65).(0.7).(0.05) + (0.65).(0.3).(0.95) + (0.35).(0.7).(0.95) = 0.56775$$

$$6)\ p(E_6) = p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(\bar{C}) + p(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + p(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + p(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$$

$$= p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(\bar{C}) + p(A).p(\bar{B}).p(\bar{C}) + p(\bar{A}).p(B).p(\bar{C}) + p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(C)$$

$$= (0.35).(0.3).(0.05) + (0.65).(0.3).(0.05) + (0.35).(0.7).(0.05) + (0.35).(0.3).(0.95) = 0.127$$

$$7)\ p(E_7) = p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(\bar{C}) + p(\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$$

$$= p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(\bar{C}) + p(\bar{A}).p(B).p(\bar{C})$$

$$= (0.35).(0.3).(0.05) + (0.35).(0.7).(0.05) = 0.0175$$

$$8)\ p(E_8) = p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(\bar{C}) = p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(\bar{C}) = (0.35).(0.3).(0.05) = 0.00525$$

الطريقة الثانية $p(E_8) = p(\Omega) - p(E_2) = 1 - 0.99475 = 0.00525$

حل التمرين 11: فضاء العينة لتجربة رمي زهرتي نرد هو:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3), \\ (2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3), \\ (5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

عدد عناصر الفضاء $n(\Omega) = 36$

	1	2	3	4	5	6
1	1 , 1	1 , 2	1 , 3	1 , 4	1 , 5	1 , 6
2	2 , 1	2 , 2	2 , 3	2 , 4	2 , 5	2 , 6
3	3 , 1	3 , 2	3 , 3	3 , 4	3 , 5	3 , 6
4	4 , 1	4 , 2	4 , 3	4 , 4	4 , 5	4 , 6
5	5 , 1	5 , 2	5 , 3	5 , 4	5 , 5	5 , 6
6	6 , 1	6 , 2	6 , 3	6 , 4	6 , 5	6 , 6

ج 1/ الحصول على نفس النتيجة في الرميتين:

$$\boldsymbol{A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\ , (4,4)\ , (5,5)\ , (6,6)\ \}}$$

$$\boldsymbol{p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}\ =\ \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.166}$$

ج 2/ احتمال الحصول على عدد فردي في الرمية الثانية؟

$$\mathrm{B} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5),} \\ \boldsymbol{(4,1), (4,3), (4,5), (5,1), (5,3), (5,5), (6,1), (6,3), (6,5)} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}\ =\ \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0.5}$$

ج3/ ما احتمال الحصول على الفرق بين نتيجة الرمية الأولى والثانية تساوي الواحد $x_1 - {}_2 =$ 1؟

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x} :\ x_1 -\ x_2 = 1) = \{\boldsymbol{(2,1)\ , (3,2)\ , (4,3), (5,4)\ , (6,5)}\ \}$$

$$\boldsymbol{p(C) = \frac{n(c)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36} = 0.1388}$$

ج 4/ ما احتمال الحصول على مجموع النتيجتين أكبر أو يساوي 9؟

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{x} :\ \boldsymbol{x_1 + x_2} \geq \mathbf{9}) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{(3,6)\ , (4,5), (4,6)\ , (5,4), (5,5), (5,6),} \\ \boldsymbol{(6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{10}{36} = 0.277}$$

ج 5/ ما احتمال الحصول على حاصل ضرب النتيجتين أقل أو يساوي 6؟

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{x} :\ \ \boldsymbol{x_1 . x_2}\ \leq \mathbf{6}) =\ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1),} \\ \boldsymbol{(2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1), (5,1), (6,1)} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p(E) =\ \frac{n(E)}{n(\Omega)} =\ \frac{14}{36} = 0.388}$$

الفصل الثالث

التحليل التوافقي

من خلال دراستنا للمجموعات توضح لنا كيفية تحديد عناصر المجموعات؛ أي تحديد فضاء العينة لتجارب العشوائية، وفي غالب الأحيان يكون فضاء العينة للعديد من التجارب كبير جداً يصعب تحديده وحصره بالطرق العادية، وعلى هذا الأساس كان من الضروري البحث في كيفيات اختيار وتشكيل وتكوين وترتيب مكونات فراغ العينات (المجموعات) ليساعدنا في حساب الاحتمالات، لكن لا توجد طريقة عامة تُطبق على كل المسائل، لذلك كان لابد من إيجاد طرق حسابية تفيد في بعض المسائل المتشابهة، لذا سوف نتطرق في هذا الفصل إلى طرق العد والتوفيقات والتباديل.

1- طرق العد: العد من المهارات الأساسية التي يتعلمها الإنسان ويستخدمها في حياته اليومية، ويقصد بالعد رياضياً هو تحديد العدد الدقيق لمجموعات من الأشياء يُشار إليها بسؤال **كم؟** ولهذا سوف نستعرض قاعدتي الجمع والضرب لما لهم من أهمية في التوفيقات والترتيبات والتباديل.

1-1: قاعدة الجمع: لنفترض بأن لدينا الحوادث ${}_1, A_2, A_3, \dots A_k$ المانعة لبعضها البعض، وليكن الحدث A_1 يحدث بـ n_1 طريقة؛ والحدث A_2 يحدث بـ n_2 طريقة؛ والحدث A_k يحدث بـ n_k طريقة، فإن وقوع الحوادث A_1 أو A_2 إلى A_k تحدث بعدد $N = (n_1 + n_2 + \dots + n_k)$ من الطرق.[1]

مثال: لنفرض بأن مصلحة القبول والتسجيل في احدى التخصصات بالسنة الثانية بكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير بجامعة البليدة، تمنح للطلبة السنة الأولى جذع مشترك فرص الالتحاق بالتخصصات التالية: في العلوم الاقتصادية تتوفر أربعة تخصصات ؛ أما في العلوم التجارية تتوفر على ثلاثة تخصصات؛ و في علوم التسيير تتوفر على خمسة تخصصات، وأراد طالب التسجيل في تخصص واحد، فبكم طريقة يمكنه ذلك؟.

الحل: بما أن الطالب يمكنه اختيار تخصص واحد فقط، أي لا يمكنه أن يدرس في أكثر من تخصص واحد أي الاحداث متنافية، فالطالب يختار تخصص واحد من مجموع التخصصات التي عددها:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 3 + 5 = 12 \text{ طريقة}$$

2-1: قاعدة الضرب: إذا كان من الممكن تحقيق شيء ما بطرق مختلفة عددها ${}_1$ ، وتحقيق شيء أخر بطرق مختلفة عددها n_2؛...؛ وأخيراً يمكن تحقيق شيء k بطريقة مختلفة عددها ${}_k$ ، فإن هذه الأشياء التي عددها k يمكن تحقيقها معاً طبقاً لأي ترتيب بطرق عددها $N = n_1 . n_2 . n_3 \dots n_k$.[2]

مثال: ليكن لدينا مجموعة مؤلفة من 15 الطالب منهم 7 ذكور و 8 إناث، نختار اثنين منهما بحيث يجب أن يكون لدينا ذكر و أنثى، بكم طريقة تتم عملية الاختيار؟

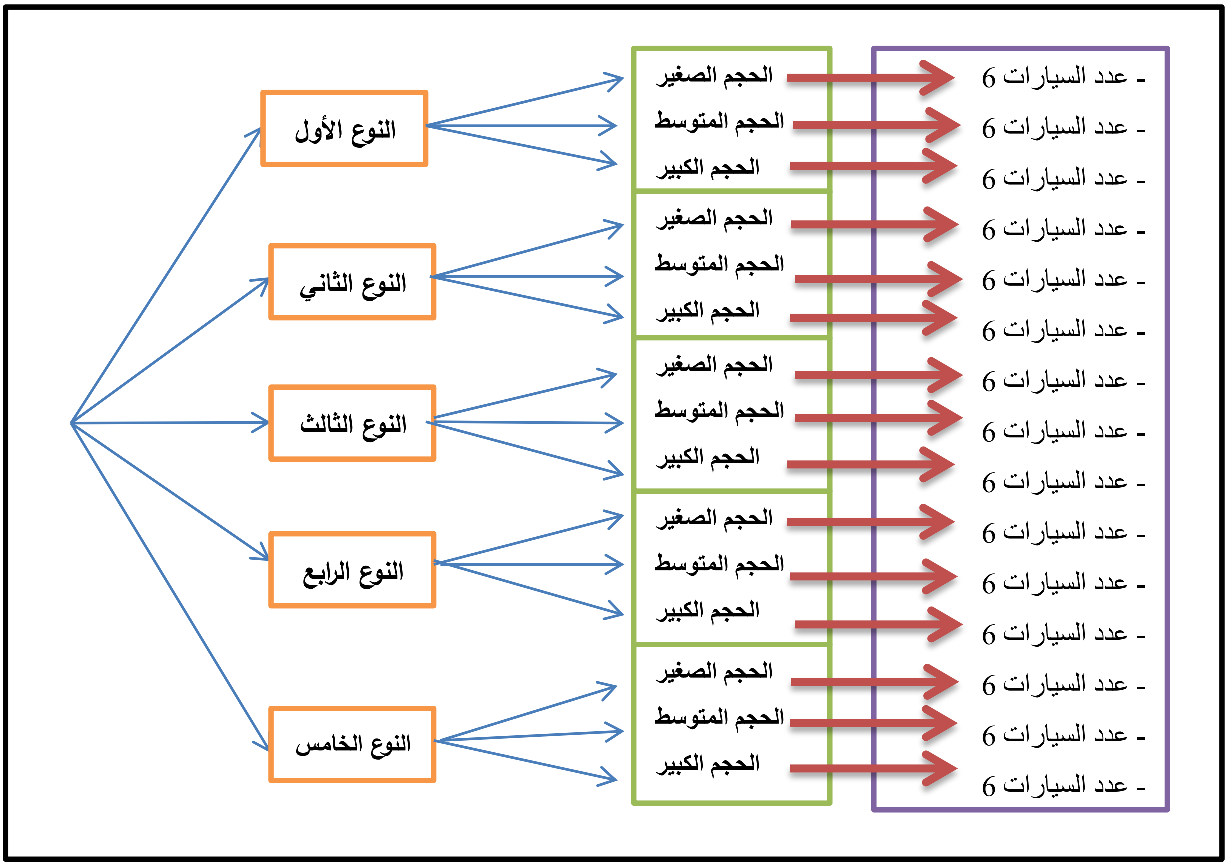
[1]- محمد حسين محمد رشيد و منى عطاالله الشويلات، **مبادئ الإحصاء والاحتمالات ومعالجتها باستخدام برنامج spss**، ط 1، دار صفاء لنشر والتوزيع، الأردن، 2012، ص 234.

[2]- موراي شبيجل و أخرون، ترجمة: محمود على أبو النصر و أخرون، الاحتمالات والاحصاء، الدار الدولية للاستثمارات الثقافي، مصر، 2004، ص 17.

الحل: حسب مبدأ العد، فإن عدد طرق اختيار الذكور مضروب في عدد اختيار الإناث

$$N = n_1 . n_2 = 7 . 8 = 56 \text{ طريقة}$$

مثال: أعلن صاحب وكالة تجارية للسيارات عن وجود لديه خمسة أنواع من السيارات ومن كل نوع توجد ثلاثة أحجام مختلفة؛ ومن كل حجم توجد ست سيارات، فما عدد السيارات لدى صاحب الوكالة؟



عدد السيارات = 6 . 3 . 5 = 90 سيارة

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار رئيس وسكرتير للجنة مكونة من سبعة أعضاء بشرط أن لا يشغل العضو منصبين معاً؟

الحل: يمكن اختيار رئيس بطرق عددها 7 ؛ بعد تثبيت أحد الأعضاء كرئيس سوف يمكننا اختيار لمنصب سكرتير بطرق عددها 6 (7-1=6).

نحصل على عدد طرق اختيار للمنصبين N= 7 . 6 = 42 طريقة / كيفية.

3-1: مضروب العدد (*the factorial*): يعرف مضروب أي عدد صحيح موجب، بانه حاصل ضرب الرقم (1) في الرقم (2) في الرقم (3)،....، وهكذا وصولاً إلى العدد نفسه،[1] ويكتب بالصيغة التالية:

$$\mathbf{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \ldots \ldots (3)(2)(1)}$$

[1] - حسن ياسين طعمة و إيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2012، ص 18.

أمثلة:

$$\mathbf{0! = 1}$$

$$\mathbf{1! = 1}$$

$$\mathbf{2! = 1.2 = 2}$$

$$\mathbf{3! = 1.2.3 = 6}$$

$$\mathbf{4! = 1.2.3.4 = 24}$$

$$\mathbf{5! = 1.2.3.4.5 = 120}$$

$$\mathbf{6! = 1.2.3.4.5.6 = 720}$$

الخاصية الأساسية للمضروب:[1]

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!$$

فمثلا يمكن كتابة !15 بصورة مختلفة:

$$15! = 15.14! = 15.14.13! = 15.14.13.12! = 15.14.13.12.11.10.9.8!$$

لهذه الخاصية دور مفيد في عملية اختزال (تبسيط الكسور) في العمليات الحسابية، وعلى سبيل المثال:

$$\frac{18!}{15!} = \frac{15!.16.17.18}{15!} = 16.17.18 = 4896$$

$$\frac{20!}{14!\,.\,6!} = \frac{14!\,.\,15.16.17.18.19.20}{14!\,.\,6!} = \frac{15.16.17.18.19.20}{1.2.3.4.5.6} = 38760$$

2- التوفيقات (التواليف): في الكثير من المسائل نهتم فقط بالاختيار الأشياء دون الأخذ في الاعتبار ترتيبها، ويسمى هذا النوع من الاختيار بالتوافيق، وهي عدد الطرق الممكنة التي يمكن بها اختيار r من الأشياء من بين n أو اختيار الكل من n أي (n=r)، ويرمز لها بالرمز $\left(\boldsymbol{C_r^n}\right)$ أو $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}}$ أو $\left(\mathbf{C_{(n\ ,r)}}\right)$.[2]

$$\mathbf{C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$ اخذنا جزء من الكل

[1]- لحسن عبدالله باشيوة، **مقدمة في الإحتمالات**، دار الوراق للنشر والتوزيع ، الأردن، 2014، ط 1، ص 191.

[2] - Prasanna Sahoo, op-cit, pp 5-10.

قواعد التوافيق: من القواعد والخصائص التي تميز التوفيقات نذكر ما يلي:[1]

$$C_0^n = C_n^n = 1$$

$$C_r^n = C_{n-r}^n \quad ,(0 \le r \le n)$$

$$C_r^n = C_S^n \quad \Leftrightarrow \quad r = S \quad or \quad r + S = n$$

$$C_r^n = \left(\frac{n-r+1}{r}\right) C_{r-1}^n$$

مثال: إذا كان عدد الاسئلة في ورقة امتحان 5 أسئلة والمطلوب الاجابة على ثلاثة منها، فبكم طريقة يمكن الاجابة على الأسئلة؟

الحل: الترتيب غير مهم في الاجابة على الاسئلة لذا فإن عدد الطرق هو:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3\,.(1.2)} = \frac{4.5}{1.2} = 2.5 = 10 \text{ طرق}$$

مثال: نريد تشكيل لجنة مكونة من أربعة أشخاص مأخوذة من مجموعة تحوي سبعة رجال و خمسة نساء،

- ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها إذا كان:

1/ ليس هناك أي شرط حول طريقة اختيار أعضاء اللجنة؟

2/ كل أعضاء اللجنة من الرجال؟

3/ كل أعضاء اللجنة من النساء؟

4/ عضوين من الرجال وعضوين من النساء؟

5/ على أن لا يزد عدد الرجال عن ثلاثة رجال؟

الحل: الترتيب غير ضروري بمعنى ليس له أهمية لأن أعضاء اللجنة بنفس المهام والدرجة.

ج 1/ بدون شروط في تحديد عدد اللجان:

$$C_4^{12} = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}{1.2.3.4\ \ .1.2.3.4.5.6.7.8} = \frac{9.10.11.12}{1.2.3.4} = 9.5.11 = 495$$

ج 2/ كل أعضاء اللجنة من الرجال؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.4.\,1.2.3} = \frac{5.6.7}{1.2.3} = 5.7 = 35$$

[1]- محمد حسين محمد رشيد و منى عطاالله الشويلات، **مبادئ الإحصاء والاحتمالات ومعالجتها باستخدام برنامج spss**، ط 1، دار صفاء لنشر والتوزيع، الأردن، 2012، ص 237.

ج 3/ كل أعضاء اللجنة من النساء؟

$$C_4^5=\frac{5!}{4!\,(5-4)!}=\frac{5!}{4!\,1!}=\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4}=5$$

ج 4/ عضوين من الرجال وعضوين من النساء؟

$$\mathrm{N}=n_1.n_2=C_2^7.C_2^5=\frac{7!}{2!\,(7-2)!}.\frac{5!}{2!\,(5-2)!}=\frac{7!}{2!\,5!}.\frac{5!}{2!\,3!}$$

$$=\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2\,.\,1.2.3.4.5}.\frac{1.2.3.4.5}{1.2.\,1.2.3}=\frac{6.7}{1.2}.\frac{4.5}{1.2}=3.7\ \ .2.5=210$$ طريقة

ج 5/ على أن لا يزد عدد الرجال عن ثلاثة رجال؟

$$N=C_3^7.C_1^5+C_2^7.C_2^5+C_1^7.C_3^5+C_0^7.C_4^5$$

$$=\frac{7!}{3!\,(7-3)!}.\frac{5!}{1!\,(5-1)!}+\frac{7!}{2!\,(7-2)!}.\frac{5!}{2!\,(5-2)!}$$

$$+\frac{7!}{1!\,(7-1)!}.\frac{5!}{3!\,(5-3)!}+\frac{7!}{0!\,(7-0)!}.\frac{5!}{4!\,(5-4)!}$$

$$=175+210+70+5=460$$

مثال: اختزل الأعداد التالية دون استعمال الآلة الحاسبة:

1) $\frac{35!}{34!}$ 2) $\frac{26!}{24!}$ 3) $\frac{8!-5!}{4!}$ 4) $\frac{4!}{2!\times 2!}$ 5) $\frac{10!}{7!\,(10-7)!}$

الحل:

1) $\frac{35!}{34!}=\frac{1.2.3.4\,\ldots\,.34.35}{1.2.3.4\,\ldots\ldots\ldots 34}=35$

2) $\frac{26!}{24!}=\frac{1.2.3.4.5\,\ldots\ldots\ldots 24.25.26}{1.2.3.4.5\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 24}=25.26=650$

3) $\frac{8!-5!}{4!}=\frac{(1.2.3.4.5.6.7.8)-(1.2.3.4.5)}{1.2.3.4}=\frac{(1.2.3.4)(5.6.7.8-5)}{1.2.3.4}$

$$=(5.6.7.8-5)=1680-5=1675$$

4) $\frac{4!}{2!\times 2!}=\frac{1.2.3.4}{(1.2).(1.2)}=\frac{3.4}{1.2}=\frac{3.4}{2}=3.2=6$

5) $\frac{10!}{7!\,(10-7)!}=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.7(1.2.3)}=\frac{8.9.10}{1.2.3}=4.3.10=120$

3- التباديل

في العديد من التجارب العشوائية التي نكون بصدد وضعها نتائجها في مجموعات كلية أو وضعها في مجموعات جزئية؛ فقد نكون بحاجة ماسة لمعرفة عدد المجموعات الكلي والجزئية التي يمكن تكوينها مع الاخذ في الحسبان ترتيبها، على عكس التوفيقات التي لا نهتم فيها بالترتيب.

تُعرف التباديل على أنها الترتيب المتسلسل لمجموعة من الأشياء مع مراعاة حالات التكرار أو عدم التكرار فيها؛ أو ترتيبها كلها أو جزء منها، والحالات الأربع هي:

3-1:تبديل دون التكرار: إذا كان لدينا n من الأشياء المميزة مأخوذة r من الأشياء، مع عدم السمح بالتكرار (دون إرجاع).

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: كم رقم يمكن تكوينه من رقمين باستخدام الأرقام التالية: (1 ، 2 ، 3 ، 4) مع عدم السماح بتكرار نفس الرقم.

الحل: * أسلوب الحصر الشامل: عدد الأرقام التي يمكن تكوينها هي : N=12

14	13	12	
34	23		21
34		32	31
	43	42	41

* بالصيغة القانونية:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = p_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1.2.3.4}{1.2} = 3.4 = 12$$ الرقم

مثال: بكم طريقة يمكن بها ترتيب خمسة كتب في أربعة أماكن مختلفة؟

هنا الترتيب الكتب مهم لكن التكرار غير ممكن أن يشغل كتب موضوعين.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = p_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 1.2.3.4.5 = 120$$ طريقة

3-2: تبديل مع التكرار: إذا كان لدينا n من الأشياء المميزة مأخوذة r من الأشياء، مع السمح بالتكرار (أو نقول السحب بإرجاع).

$$\boxed{\underbrace{n.n.n.n.n\ldots\ldots\ldots n}_{\text{r من المرات}} = P_r^n = n^r}$$

مثال: كم رقم يمكن تكوينه من رقمين باستخدام الأرقام التالية: (1 ، 2 ، 3 ، 4) مع السماح بتكرار نفس الرقم.

الحل: * أسلوب الحصر الشامل: عدد الأرقام التي يمكن تكوينها هي : N= 16.

1 1	**1 2**	**1 3**	**1 4**
2 1	**2 2**	**2 3**	**3 4**
3 1	**3 2**	**3 3**	**3 4**
4 1	**4 2**	**4 3**	**4 4**

* بالصيغة القانونية:

$\boldsymbol{P_r^n = 4^2 = 4.4 = 16}$ الرقم

مثال: وعاء به سبعة كرات ملونة، ما هو عدد طرق سحب كرتين بإرجاع؟ الترتيب مهم والتكرار مسموح به

$\boldsymbol{P_2^7 = 7^2 = 49}$ طريقة

3-3: حالة اختيار الكل من الكل - التباديل دون التكرار: إذا كان لدينا n من الأشياء المميزة مأخوذة n من الأشياء، مع عدم السمح بالتكرار (دون إرجاع).

$$P_n = (n)(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(1) = n!$$

مثال: كم رقم يمكن تكوينه أربعة أرقام باستخدام الأرقام التالية: (1 ، 2 ، 3 ، 4) مع عدم السماح بتكرار نفس الرقم.

$P_4 = 4! = 1.2.3.4 = 24$

مثال: لنفرض لدينا ثلاثة كتب (الإحصاء، رياضيات، محاسبة) بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الكتب على رف؟

الحل: نلاحظ هنا بأن التكرار غير ممكن.

$\boldsymbol{P_3 = 3! = 1.2.3 = 6}$ طرق

4-3: حالة اختيار الكل من الكل - التباديل مع التكرار: إذا كان لدينا n من الأشياء المميزة مأخوذة n من الأشياء، مع السمح بالتكرار (بإرجاع).

$$P_n = n^n$$

مثال: كم رقم يمكن تكوينه أربعة أرقام باستخدام الأرقام التالية: (1 ، 2 ، 3 ، 4) مع السماح بتكرار نفس الرقم.

$$P_4 = 4^4 = 4.4.4.4 = 256$$

5-3: حالة التباديل الدائرية: إذا كان لدينا n من الأشياء المميزة مأخوذة n من الأشياء مرتبة في شكل دائري. وهي حالة خاصة من التباديل تسمى التباديل الدائرية لـ n عنصر.

$$\boldsymbol{P_n = (n-1)!}$$

مثال: كم طريقة يمكن بها ترتيب خمسة طالب حول طاولة مستديرة؟

$\boldsymbol{P_5 = (5-1)! = 4! = 1.2.3.4 = 24}$ طريقة

6-3: التباديل داخل أشياء متشابهة: إذا كان لدينا (n) من الأشياء نود ترتيبها، بحيث إذا كان هناك (n_1) تمثل أشياء من النوع الأول المتشابهة؛ و (n_2) تمثل أشياء من النوع الثاني المتشابهة؛ و(n_3) تمثل أشياء من النوع الثالث المتشابهة....؛ وهكذا إلى غاية (n_k) تمثل أشياء من النوع k المتشابهة، فإن عدد طرق ترتيبها يحسب بالصيغة القانونية التالية:[1]

$$\boldsymbol{P^{n}_{n_1,\ n_2,n_3,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!\ n_4!\dots\dots\dots n_k!}}$$

مثال: كم عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب 15 كتاب على رف إذا كان منها 4 في الإحصاء و 3 في المحاسبة و 5 في الرياضيات و 3 في الاقتصاد؟

$$P^{15}_{4,3,5,3} = \frac{15!}{4!\,3!\,5!\,3!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15}{1.2.3.4.\ 1.2.3\ \ 1.2.3.4.5\ 1.2.3} = 12612600$$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة Mathématiques ؟

$\boldsymbol{m = 2}$, $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{t = 2}$, $\boldsymbol{h = 1}$, $\boldsymbol{e = 2}$, $\boldsymbol{i = 1}$, $\boldsymbol{q = 1}$, $\boldsymbol{u = 1}$, $\boldsymbol{s = 1}$

$$\boldsymbol{P^{13}_{2,2,2,1,2,1,1,1,1} = \frac{13!}{2!\,2!\,2!\,1!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 389188800}$$

[1]- أنظر كل من: محمد حسين محمد رشيد، ص 236، وحسن ياسين طعمة ، ص 21.

تمارين الفصل الثالث

التمرين 01: أوجد عدد الطرق لاختيار حرفين من بين الحروف A ، B ، C بدون ترتيب؟

التمرين 02: تتكون اللجنة الدينية بأحد المساجد من 13 شخص، ما هو عدد طرق لاختيار رئيس ونائب الرئيس وأمين الصندوق (على أن لا يتولى الفرد أكثر من منصب واحد) ؟

التمرين 03: يتكون قسم طبي بأحد المستشفيات 13 طبيب و 18 طبيبة، نقوم باختيار شخصين من هذا القسم، بكم طريقة يمكن:

1/ اختيار طبيب و طبيبة؟

2/ اختيار شخصين من نفس الجنس (طبيبين أو طبيبتين)؟

التمرين 04: تضم البطولة الجزائرية القسم الممتاز لكرة القدم 16 فريق، بحيث كل فريق يقابل الفرق الأخر مرتين خلال الموسم الكروي ذهاباً وإياباً، لضبط عملية البرمجة للموسم الكروي نود معرفة عدد المقابلات التي سوف تجرى؟

التمرين 05: أجب على الأسئلة التالية:

1/ بكم طريقة يمكن أن يجلس ثمانية أشخاص على ثمانية كراسي موضوعة في صف واحد؟

2/ بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 رجال و 4 نساء في صف بحيث تجلس المرأة في المقاعد الزوجية؟

3/ في تجربة إلقاء قطعة نقدية 8 مرات، كم نتيجة يمكن الحصول عليها؟

4/ عدد الطرق التي نختار بها ثلاثة حروف من بين الحروف $\{A, b, s, h, k, m\}$ ؟

التمرين 06: كم عدد يمكن تكوينه بأربعة أرقام من الأرقام التالية (2، 3، 5، 6، 8) في حالة عدم التكرار:

1/ بدون شرط؟

2/ كم عدد منها فردي؟

3/ كم عدد منها زوجي؟

4/ كم عدد منها ينتهي بالرقم 5؟

5/ كم عدد منها أكبر من الرقم 3865؟

التمرين 07: أوجد عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من جميع الحروف لكل من الكلمات التالية:

(Connection), (businessman) , (Administrative), (Sciences).

التمرين: بكم طريقة يمكن ترتيب 15 كتاب على رف إذا كان منها: خمسة كتب في المحاسبة و اثنين في المنهجية و ثلاثة في الرياضيات و كتاب في الإحصاء و أربعة في الاقتصاد؟

التمرين 08: أجب على الأسئلة التالية:
1/ كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها أربعة ذكور و خمسة أناث على مقاعد موضوعة في صف واحد؟
2/ كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها الذكور والإناث إذا كان على الذكور أن يجلسوا بجانب بعضهم البعض وكذلك الإناث؟
3/ كم عدد الطرق التي يستطيع أن يجلس الذكور والإناث إذا كان على الإناث فقط أن يجلسوا بجانب بعضهم البعض؟

التمرين 09: أجب على الأسئلة التالية:
1/ كم عدد مكون من رقمين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام (5 ، 6 ، 8، 9) إذا لم يُسمح بتكرار الأرقام؟ ثم في حالة تكرار الأرقام؟
2/ كم كلمة مكونة من أربعة أحرف يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف (ب ، ج ، ع ، ق ، ص ، ك) علماً ليس من الضروري أن يكون للكلمة معنى ولا يسمح بتكرار أي حرف؟
3/ بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب له من بين 12 موظف؟ (في حالة التكرار و في حالة عدم التكرار)
4/ بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة طلبة على سبعة مقاعد موضوعة على استقامة واحدة؟

التمرين 10: بكم طريقة يمكن اختيار عميداً ونائبين له من بين 20 أستاذ بإحدى الكليات بجامعة البليدة 2،
1/ على أن لا يتولى أي شخص منصبين أو أكثر معا (أي حالة عدم التكرار)؟
2/ يمكن للأستاذ أن يتولى ثلاثة مناصب معاً (حالة التكرار)؟
3/ يمكن للأستاذ أن يتولى منصبين لا على الأكثر (حالة التكرار)؟

التمرين 11: في نهائي لأحدى البطولات العالمية للألعاب القوى سباق 1500 متر يتنافس سبعة عدائين على الفوز بإحدى الميداليات: الذهبية ؛ الفضية؛ البرونزية، فبكم طريقة يمكن توزيع هذه الميداليات؟

التمرين 12: يتألف المجلس الشعبي البلدي لأحد البلديات من 15 عضو منتخب، وحتى يجتمع هذا المجلس يجب أن يحضر ثلثي الأعضاء (أي عشرة أعضاء).
1/ بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني لكي يجتمع المجلس المكون من ثلثي الأعضاء؟
2/ بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني؟

التمرين 13: نقوم بسحب ثلاثة كرات في آن واحد من كيس يحتوي على 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 2 حمراء، بحيث أن الكرات متماثلة.
المطلوب: ما احتمال الحصول على:
1/ كل الكرات من نفس اللون؟
2/ كرتين فقط من نفس اللون؟
3/ كرة على الأقل سوداء؟

التمرين 14: أوجد قيمة n من العلاقة التالية: $\mathbf{3 . C_3^{n+1} = 7 . C_2^{n}}$

حلول تمارين الفصل الثالث

حل التمرين 01: عدد طرق اختيار حرفين بدون ترتيب:

$$\{(AB),(AC)\,,(BC)\}$$

ومنه فإن عدد الطرق هو 3

$$C_r^n=\frac{P_r^n}{r\,!}=\frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}=C_2^3=\frac{3\,!}{2\,!\,(3-2)\,!}=\frac{1.2.3}{1.2.1}=3$$

حل التمرين 02: لدينا 13 عضو في اللجنة بكم طريقة يمكن تعين رئيس ونائب وأمين صندوق، على أن لا يتولى الفرد أكثر من منصب واحد أي حالة عدم التكرار لكن الترتيب مهم، حالة التباديل:

$$p_3^{13}=\frac{13!}{(13-3)!}=\frac{10!\,.\,11\,.\,12\,.\,13}{10!}=11.\,12.\,13=1716\ \text{طريقة}$$

حل التمرين 05: 1/ بكم طريقة يمكن أن يجلس ثمانية أشخاص على ثمانية كراسي موضوعة في صف واحد؟

$$p_8=8!=1.2.3.4.5.6.7.8=40320\ \text{طريقة}$$

2/ بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 رجال و 4 نساء في صف بحيث تجلس المرأة في المقاعد الزوجية؟

رقم المقعد	1	2	3	4	5	6	7	8	9
عدد الطرق	5 طرق لأجلس 5 رجال في المقعد الأول	4 طرق لأجلس 4 نساء في المقعد الثاني	4 طرق لأجلس 4 رجال بعد ما تم إجلس الرجل الأول	3 طرق لأجلس 3 نساء بعد ما تم إجلس المرأة الأولى في المقعد الثاني	3 طرق لأجلس 3 رجال بعد ما تم إجلس رجلين	2 طرقتين لأجلس إمرأتين بعد ما تم إجلس إمرأتين	2 طرقتين لأجلس رجلين بعدما تم إجلس ثلاثة رجال	طريقة واحدة لإجلس إمرأةبعد ما تم إجلس ثلاثة نساء	طريقة واحدة بعد ما تم إجلس أربعة رجال
2880	5	4	4	3	3	2	2	1	1

ومنه فإن عدد الطرق هو 2880 طريقة.

3/ في تجربة إلقاء قطعة نقدية 8 مرات، كم نتيجة يمكن الحصول عليها؟ هذه حالة الترتيب مهم والتكرار مسموح به:

$$n^k=2^8=2.2.2.2.2.2.2.2=16\ \text{نتيجة}$$

4/ عدد الطرق التي نختار بها ثلاثة حروف من بين الحروف $\{A,b\,,s,h,k\,,m\}$ ؟

أ- حالة عدم تكرار الحروف: عدد الحروف ستة والترتيب مهم

$$A_3^6=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{3!}=\frac{3!\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{3!}=4.\,5.\,6=120\ \text{طريقة}$$

حل التمرين 06: عدد الأرقام التي يمكن تكوينه بأربعة أرقام من الأرقام التالية (2، 3، 5، 6، 8) في حالة عدم التكرار:

ج 1/ بدون شرط؟

عدد طرق	خيارين	ثلاثة اختيارات	أربعة اختيارات	خمسة اختيارات
120	2	3	4	5

$$A_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 1.2.3.4.5 = 120 \text{ رقم}$$

2/ كم عدد منها فردي؟ لكي يكون الرقم المكون فردي لدينا خيارين 3 و 5 ليتم اختيارهم في رقم الأحاد، إذن لدينا خيارين، لكن بعد اختيار أحد الرقمين 3 أو 5 يمكن اختيار الرقم الذي لم يتم وضعه في رقم الأحاد:

رقم الأحاد (عدد فردي)	رقم العشرات	رقم المئات	رقم الألاف
2	4	3	2

عدد الأرقام هو = 2.4.3.2= 48 رقم فردي

$$A_1^2 . A_3^4 = \frac{2!}{(2-1)!} . \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{1.2}{1} . \frac{1.2.3.4}{1} = 48 \text{ رقم}$$

3/ كم عدد منها زوجي؟ نحصل على العدد الزوجي بوضع الرقم 2 أو 6 أو 8 في رقم الاحاد كما يلي:

رقم الأحاد (عدد زوجي)	رقم العشرات	رقم المئات	رقم الألاف
3	4	3	2

عدد الأرقام هو = 3. 4 . 3 .2 =72 رقم

$$A_1^3 . A_3^4 = \frac{3!}{(3-1)!} . \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{1.2.3}{1.2} . \frac{1.2.3.4}{1} = 72 \text{ رقم}$$

4/ كم عدد منها ينتهي بالرقم 5؟ أي وضع الرقم 5 في خانة الأحاد:

رقم الأحاد	رقم العشرات	رقم المئات	رقم الألاف
1	4	3	2

عدد الأرقام هو = 1.4 .3 .2 = 24 رقم

$$A_1^1 . A_3^4 = \frac{1!}{(1-1)!} . \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{1}{1} . \frac{1.2.3.4}{1} = 24 \text{ رقم}$$

5/ كم عدد منها أكبر من الرقم 3865؟ باستخدام هذه الأرقام بهذا الترتيب يعني هذا هو أكبر رقم يمكن تشكيله من هذه الأرقام، الرقم الموالي هو أن يكون الرقم خمسة في مرتبة الألاف والرقم 2 في مرتبة المئات والرقم 3 في مرتبة العشرات والرقم 6 في مرتبة الأحاد: والرقم هو (5236) هذا أصغر رقم أكبر من الرقم 3865، ومنه فإن عدد الخيارات التي توضع في خانة رقم الألاف لكي نحصل على رقم أكبر من الرقم 3865 هو ثلاثة خيارات وهي أما 5 أو 6 أو 8:

رقم الآحاد	رقم العشرات	رقم المئات	رقم الألاف
2	3	4	3

العدد هو = 2. 3 . 4 . 3 = 72 رقم

$$A_1^3 . A_3^4 = \frac{3!}{(3-1)!} . \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{1.2.3}{1.2} . \frac{1.2.3.4}{1} = 72$$ رقم

حل التمرين 10: عدد طريقة يمكن اختيار عميداً ونائبين له من بين 20 أستاذ:

ج 1/ على أن لا يتولى أي شخص منصبين أو أكثر معا (أي حالة عدم التكرار): لكن يكون ترتيب مهم:

$$A_3^{20} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = \frac{17! . 18 . 19 . 20}{17!} = 18.19.20 = 6840$$

2/ يمكن للأستاذ أن يتولى ثلاثة مناصب معاً (حالة التكرار)؟

$$\boldsymbol{n^r = 20^3 = 20.20.20 = 8000}$$ طريقة

3/ يمكن للأستاذ أن يتولى منصبين لا على الأكثر (حالة التكرار)؟

$$\boldsymbol{n^r - 20 = 20^3 - 20 = 20.20.20 - 20 = 7980}$$ طريقة

حل التمرين 12:

ج 1/ بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني لكي يجتمع المجلس المكون من ثلثي الأعضاء، علما أن عدد الأعضاء هو 15 عضو

$$C_{10}^{15} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = \frac{10! . 11. 12. 13 . 14. 15}{10! \quad . \ 5!} = \frac{11.12.13.14.15}{1.2.3.4.5} = 3003$$

ج 2/ بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني؟

$$\mathrm{N} = C_{10}^{15} + C_{11}^{15} + C_{12}^{15} + C_{13}^{15} + C_{14}^{15} + C_{15}^{15}$$

$$= 3003 + 1365 + 455 + 105 + 15 + 1 = 4944$$ طريقة

الفصل الرابـــــع
المتغـير العشوائـــي

تطرقنا في ما سبق إلى التجربة العشوائية ونتائجها و بعض الأسس والقواعد الاحتمالية وبينا أن هذه الأسس والقواعد ترتبط بنتائج التجربة العشوائية، لكن لم نتطرق بالتفصيل إلى نتائج التجربة العشوائية التي في الكثير من الأحيان لا تكون نتائجها قيم عددية وهذا نظراً إلى اختلاف التجارب العشوائية في حد ذاتها، لذا سوف ينصب اهتمامنا في هذا الفصل بالتعبير عن نتائج التجارب العشوائية بمقياس عددي اصطلح على تسمية المتغير، ويعرف هذا المتغير على أنه الصفة أو الخاصية أو السمة التي تأخذ قيماً مختلفة سواء كانت صفة مثل اللون؛ الحالة العائلية؛ منطقة الإقامة...الخ، كما قد تكون كصفة الطول والوزن والسرعة والمساحة.

1- تعريف المتغير العشوائي

المتغير العشوائي في أبسط تعريف له هو دالة رياضية تأخذ نواتج التجربة العشوائية وتخصص لها قيم حقيقية بحيث أن كل ناتج من نواتج التجربة يحول إلى قيمة حقيقية واحدة فقط بينما يمكن لناتجين مختلفين أن يحولوا إلى نفس القيمة.[1]

يعرف المتغير العشوائي على أنه تحويل الحوادث البسيطة في تجربة عشوائية إلى كميات رقمية تعبر عن النواتج الممكنة للظاهرة موضوع الاهتمام، ومن المعتاد أن نرمز للمتغير العشوائي بحرف كبير مثل X ما لم يشار إليه برمز أخر،[2] وعلى ضوء هذا التعريف يمكن القول بأن المتغير العشوائي هو قيمة عددية لكل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية.

ويعرف المتغير العشوائي على أنه عبارة عن ظاهرة نوعية أو كمية تأخذ قيماً مختلفة لا يمكن التنبؤ بها بشكل مسبق وتقترن بقيم احتمالية، ومن بين الظواهر التي يمكن التعبير عنها بمتغيرات عشوائية:

- عدد حوادث المرور في يوم معين؛
- عدد المرضى الذين يترددون على عيادة في احد الأيام؛
- عدد المكلمات الهاتفية في اليوم؛
- دراجات الحرارة المسجلة خلال الأسبوع؛
- عدد زبائن أحد المحلات التجارية في الأسبوع القادم؛

وعلى ضوء ما سبق من أمثلة توضيحية يتكون المتغير العشوائي من نوعين هما:

1- المتغيرات العشوائية المنفصلة؛

2- المتغيرات العشوائية المتصلة.

[1]- لحسن عبدالله باشيوة، **مقدمة في الإحتمالات**، دار الوراق، الأردن، 2014، ص 111.
[2]- جورج كانافوس و دون ميلر، تعريب سلطان محمد عبد الحميد، **الإحصاء للتجاريين مدخل حديث**، دار المريخ، السعودية، 2004، ص 159.

2- المتغير العشوائي المنفصل

لنفترض أن X متغير عشوائي منفصلاً يأخذ عددا منتهيا من القيم الصحيحة $_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ ضمن مجال تغيره، وتأخذ $_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ القيم الاحتمالية الآتية:[1]

$$P(X = x_K) = \mathrm{f}(x) \qquad K = 1,2,3, \ldots \ldots n$$

مثال: في تجربة رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين في تجربة عشوائية.

الطلوب: 1/ عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد مرات ظهور الرقم T.

الحل: 1/ تعريف المتغير العشوائي المنفصل X : والمتمثل في عدد مرات ظهور الرقم (T) :

$$\mathrm{X} = \{\text{عدد مرات ظهور الرقم}\}$$

فضاء العينة (Ω) : $\quad n\,(\Omega) = 4 \quad \Omega = \{hh\,, ht\,, th\,, tt\}$

Ω	hh	ht	th	tt
X	0	1	1	2

قيم المتغير العشوائي المنفصل X $\quad X(\Omega) = \{0\,, 1\,, 2\}$

2-1: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

يسمى الجدول الذي تظهر فيه القيم الممكنة للمتغير العشوائي X مع احتمالاتها بالجدول الاحتمالي أو التوزيع الاحتمالي أو دالة رياضية أو معادلة أو عرض بياني تبين كيف تتوزع الاحتمالات على قيم المتغير المختلفة. كما أن الكثير من المتغيرات العشوائية لها نفس قانون التوزيع الاحتمالي غير أن الاختلاف بينها يكمن في مميزاتها العددية أي الاختلاف بين التوقعات الرياضية والانحرافات المعيارية.

ويكون التوزيع الاحتمالي هو توزيع منفصل (متقطع) يتميز بالخصائص التالية:[2]

$$\begin{cases} \mathbf{f(x) \geq 0} \\ \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{f(x) = 1} \end{cases}$$

ومن بين أمثلة التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصلة نجد توزيع ذات الحدين ؛ توزيع برنولي؛ والتوزيع بواسون ...الخ.

مثال: بالرجوع إلى المثال السابق، أوجد التوزيع الاحتمالي؟ ثم أرسم دالة التوزيع الإحتمالي؟

X	0	1	2
$p(X = x_i)$	1/4	2/4	1/4

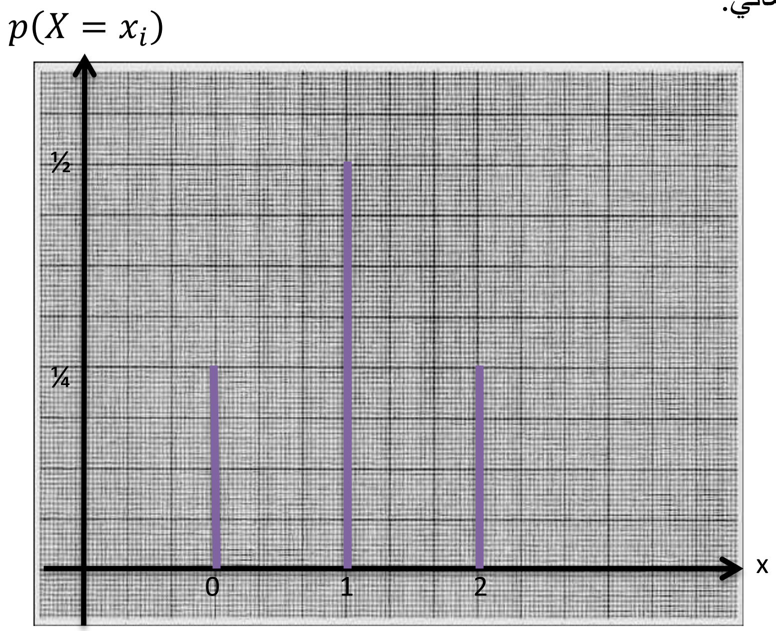
ومنه يمكن كتابة صيغة دالة التوزيع الاحتمالي $p(X = x_i)$ على الوجه الآتي:

[1]- سلسلة شوم، ص 32.

[2] - Ronald E. Walpole And others, op-cit, p 84.

$$p(X = x_i)\begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad x_i = \{0\,,2\} \\ \frac{1}{2} & , \quad x_i = 1 \\ 0 & , \quad \text{غير ذلك} \end{cases}$$

- رسم دالة التوزيع الإحتمالي:



2-2: دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل

دالة التوزيع أو تابع التوزيع الاحتمالي هو التابع التجميعي، ويرمز له بالرمز $\mathrm{F}(X)$ ويكتب بالشكل التالي: $F(x) = p(x \le x_i)$،

ويمكن كتابة هذه الدالة بالشكل التالي:[1]

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \le x < x_3 \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) & x_3 \le x < x_4 \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) & x_4 \le x < x_5 \\ \quad\quad . & \\ \quad\quad . & \\ \quad\quad . & \\ f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = 1 & x_n \le x < +\infty \end{cases}$$

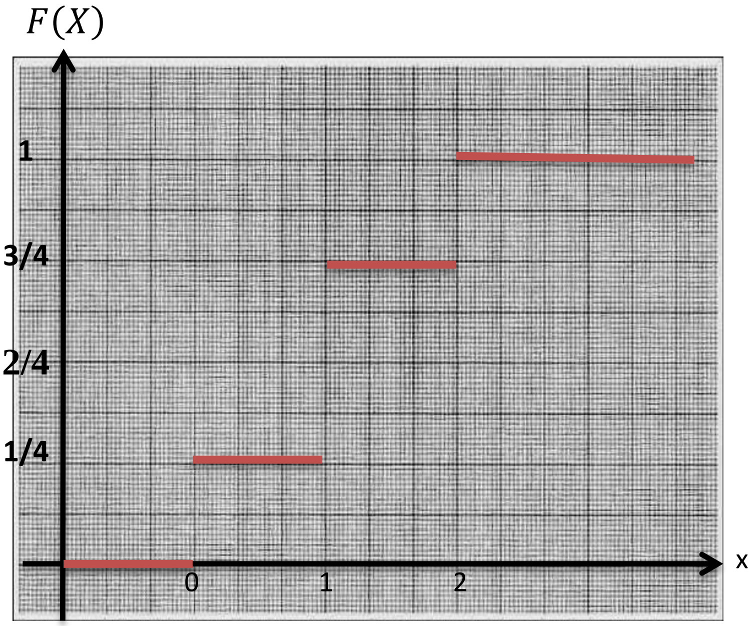
[1]- جيلالي جلاطو، **نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية**، دار هومه، الجزائر، 2014، ص 76.

مثال: أوجد دالة الكثافة الاحتمالية (دالة التراكمية) للمثال السابق؟ ثم أرسم بيانياً دالة

X	0	1	2	المجموع
$p(X=x_i)$	1/4	2/4	1/4	1
$f(x_i)$	1/4	3/4	4/4	

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/4 & 0\le x<1 \\ 3/4 & 1\le x<2 \\ 4/4 & 2\le x \end{cases}$$

- الرسم البياني:



3-2: التوقع الرياضي للمتغير العشوائي

نحن نتعامل في حياتنا اليومية مع فكرة التوقع دون أن ندرك معناها، إذاً ماذا يقصد بالتوقع (بالقيمة المتوقعة)؟ تعود فكرة القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي التي ترجع جذورها إلى ألعاب الحظ والمقامرة، لأن المقامرين يرغبوا في معرفة المكسب المتوقع عند تكرار اللعب في مباراة ما، وهي متوسط القيمة (الكمية)، بهذا المعنى هي القيمة التي يقبلها المقامر مستعد ليقبلها عند الربح أو الخسارة في كل لعبة يلعبها، أي أن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي هي متوسط قيم المتغير العشوائي عبر العديد من المشاهدات.

نرمز للمتوسط الحسابي أو التوقع الرياضي بالرمز $\mathbf{E(x)}$ وهو عبارة عن جداء قيم المتغير العشوائي في إمكانيات ظهورها وتكتب بالصيغة الرياضية التالية:[1]

$$\boldsymbol{E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)}$$

---

[1]- عزام صبري، **الإحصاء الرياضي**، ط 1، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2010، ص 117.

- **خواص التوقع أو الأمل الرياضي**: يتميز التوقع الرياضي بالخصائص التالية:[1]

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{k}) = \sum \mathbf{k}\,.\,\mathbf{p}(\mathbf{k_i}) = \mathbf{k}\,.\,\sum \mathbf{p}(\mathbf{k_i}) = \mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{k}\,.\,\mathbf{x}) = \sum \mathbf{k}\,.\,\boldsymbol{x_i}\ .\,\mathbf{p}(\mathbf{x_i}) = \mathbf{k}\,.\,\sum \boldsymbol{x_i}\ .\ \mathbf{p}(\mathbf{x_i}) = \mathbf{k}\,.\,\mathbf{E}(\boldsymbol{x_i})$$

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{k} + \mathbf{x}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{k}) + \mathbf{E}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{k} + \mathbf{E}(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{E}(\boldsymbol{y})$$

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{x})\,.\,\mathbf{E}(\boldsymbol{y})$$

مثال: بالعودة إلى المثال السابق، نقوم بحساب التوقع الرياضي؟

X	0	1	2	المجموع
$p(X = x_i)$	1/4	2/4	1/4	1
$f(x_i)$	1/4	3/4	4/4	
$\boldsymbol{x_i\ .p(x_i)}$	0	2/4	2/4	1

ومنه فإن التوقع الرياضي يساوي 1.

$$\boldsymbol{E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ .p(x_i) = 0.\frac{1}{4} + 1\,.\frac{2}{4} + 2\,.\frac{1}{4} = 1}$$

4-2: التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المتقطع

سوف نقدم في هذا الجزء مفهوماً جديداً وهو التباين، إن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي تقيس لنا فقط النزعة المركزية لقيم المتغير العشوائي، والقيمة المتوقعة لا توضح لنا شيئا عن الاختلافات بين قيم المتغير العشوائي، لذلك نحن بحاجة إلى مقياس أخر ليبين لنا مدى تباعد وتشتت القيم المتطرفة عن القيمة المركزية وهو التباين$(\boldsymbol{variance})$ ، ويرمز له بالرمز $\boldsymbol{var(x)}$ ، و يحسب بالصيغة التالية:[2]

$$\boldsymbol{var(x) = E(x-\mu)^2 = \sum (x-\mu)^2\ .p(x)}\ ,$$ μ متوسط القيم

$$\boldsymbol{= \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\ \ .p(x_i)\ -\ \mu^2}$$

$$\boldsymbol{= E(x^2) - \left(E(x)\right)^2}$$

---

[1]- جيلالي جلاطو، مرجع سابق، ص 77.
[2]- جورج كانافوس و دون ميلر، ترجمة: سلطان محمد عبدالحميد، **الإحصاء للتجاريين مدخل حديث**، دار المريخ، السعودية، 2004، ص 180.
أنظر إلى كل من شفيق العتوم ، مرجع سابق، ص 250، و لحسن عبدالله باشيوة، ص 133.

مثال: بالعودة إلى نفس المثال السابق نقوم بحساب التباين:

X	0	1	2	المجموع
$p(X = x_i)$	1/4	2/4	1/4	1
$f(x_i)$	1/4	3/4	4/4	
$\boldsymbol{x_i\ .p(x_i)}$	0	2/4	2/4	1
$\boldsymbol{(x_i)^2.p(x_i)}$	0	1/2	1	3/2

قيمة التباين $\boldsymbol{var(x) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2 = \frac{3}{2} - (1)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}}$

- **الانحراف المعياري:** هو الجذر التربيعي للتباين

$$\boldsymbol{\sigma(x) = \sqrt{var(x)} = \sqrt{1/2} = 0.707}$$

- **خواص التباين:** للتباين مجموعة من الخواص التي يتميز بها، هي كما يلي:[1]

- تباين القيمة الثابتة C يساوي صفراً، أي أن $\boldsymbol{var(c) = 0}$

- تباين حاصل ضرب القيمة الثابتة C والمتغير العشوائي X هو

$$\boldsymbol{var(Cx) = C^2 var\ (x)}$$

- تباين حاصل جمع القيمة الثابتة C والمتغير العشوائي X هو:

$$\boldsymbol{var(C + x) = var\ (x)}$$

- تباين حاصل جمع (أو طرح) متغيرين مستقلين X و Y هو:

$$\boldsymbol{var(x \pm y) = var\ (x) + var(y)}$$

أما إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y غير مستقلين فإن:

$$\boldsymbol{var(x \pm y) = var\ (x) + var(y) \pm cov(x, y)}$$

4- المتغير العشوائي المتصل

المتغير العشوائي المتصل أو نقول المستمر أو المتواصل هو الذي يأخذ قيماً متصلة، ويأخذ عدد لا نهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر ويقع في المدى $(, b)$ أي أن:

$$\{X = x: \quad a < x < b\}$$

فإن للمتغير X عدد لا نهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى(a, b)،[2] ومن بين أمثلة على ذلك:

- أوزن كمية اللحوم المباعة يومياً في محل ما.

- أطوال للاعبين في فريق كرة الطائرة.

---

[1]- شفيق العتوم، مرجع سابق، ص 252.

[2]- جبار عبدمضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات**، ط 1، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الأردن، 2001، ص 133.

- كمية الأمطار المتساقطة في فصل الشتاء.

- درجات الحرارة في فصل الصيف المسجلة في الجزائر.

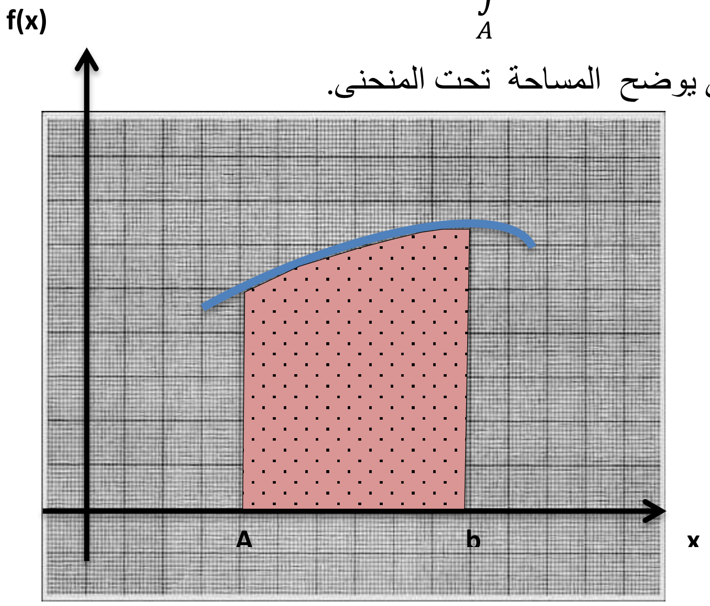
- سرعة السيارة في الطريق السيار شرق غرب.

- الدخل الشهري لأساتذة الجامعة.

1-4:تعريف المتغير العشوائي المستمر: ليكن X متغيراً عشوائياً متصلا، والمعرف على $X \in [A , B]$، فيسمى الاقتران $f_X(x)$ الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X إذا وفقط إذا كان:[1]

$$f_X(X) \geq 0 , \qquad x \in [A , B] \; ; \qquad \int_A^B f_X(X)\, dx = 1$$

والشكل البياني التالي يوضح المساحة تحت المنحنى.



التعبير الرياضي $f(X)$ هو دالة كثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي متصل X إذا تحقق الشرطان التاليين:[2]

1- لأي قيمة X من قيم المتغير العشوائي X في الفترة التي يعرف خلالها X، تعطي دالة $f(X)$ كمية غير سالبة؛

2- المساحة الكلية تحت المنحنى البياني $f(X)$ والمحدودة من أسفل بالمحور الأفقي ومن على اليسار ومن على اليمين بأصغر وأكبر قيمة لـ X تساوي الواحد.

مثال: ليكن المتغير العشوائي X المعرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} c\, x^2 & x \in [0 , 3] \\ 0 & x \notin [0 , 3] \end{cases}$$

[1]- محمد حسين محمد رشيد و منى عطا الله الشويلات، **مبادئ الإحصاء والاحتمالات ومعالجتها**، ط 1، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2012، ص 290.

[2]- جورج كانافوس و دون ميلر، مرجع سابق، ص 171.

المطلوب:1- أوجد قيمة الثابت C التي تحقق الشرطين الأول والثاني لدالة الكثافة الاحتمالية؟

2- أحسب القيمة الاحتمالية $p(1 \leq x_i \leq 2)$؟

الحل: لا ثبات أن الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية، ينبغي تحقق الشرطان التاليين:

$$1) \qquad f_X(X) \geq 0 \qquad , \qquad \forall\, x_i\ , \qquad 0 \leq x_i \leq 3$$

$$2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{3} c\, x^2\, dx + \int_{3}^{+\infty} 0\, dx = 1$$

$$\int_{0}^{3} c\, x^2\, dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c\, 9 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1/9$$

تصبح دالة التوزيع الاحتمالي كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}\, x^2 & x \in [0\,,3] \\ 0 & x \notin [0\,,3] \end{cases}$$

2/ إيجاد القيمة الاحتمالية:

$$p(1 \leq x_i \leq 2) = \int_1^2 f(x_i)dx = \int_1^2 \frac{1}{9}\ \ x^2\, dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right] = \frac{7}{27}$$

2-4: دالة التوزيع التجميعي للمتغير العشوائي المستمر

هي عبارة عن دالة التجميعية لتابع الكثافة الاحتمالية ويرمز لها بالرمز $F(x)$ وتكتب بالصيغة التالية:[1]

$$\boldsymbol{F(X) = f(X \leq x) = p(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(X)\, dx}$$

- خواص دالة التوزيع التجميعية: من خواص هذه الدالة:

1/ $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ ، $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

حيث أن : $R_x(-\infty < x < \infty)$

2/ الدالة $F(x)$ دالة متزايدة بالنسبة للمتغير X أي أن لكل $x_1 < x_2$ فإن : $F(x_1) \leq F(x_2)$

3/ إذا كان $x_1 < x_2$ فإن : $p(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

4/ إن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر X هي دالة مستمرة لأن $(x) = \frac{dF(x)}{d}$

5/ إذا كانت $F(x)$ هي دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر X فإن:

$$p(X > x) = 1 - p(X \leq x) = 1 - F(x)$$

[1]- Ronald E. Walpole And others, op-cit, p 90.

3-4: التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر

التوقع الرياضي أو ما يسمى الأمل الرياضي للمتغير العشوائي: هو القيمة المتوقعة أو المتوسطة للمتغير العشوائي، ويمكن كتابته بالشكل التالي:[1]

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,.\, f(x)\, dx$$

مثال: بالعودة إلى المثال السابق قم بحساب التوقع الرياضي؟

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,.\, f(x)\, dx = \int_{0}^{3} x \,.\frac{1}{9}\, x^2 = \frac{1}{9}\int_{0}^{3} x^3 = \frac{1}{9}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{1}{9}\,.\frac{81}{4} = \frac{9}{4}$$

4-4: التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المستمر

إذا كان المتغير المتصل X له دالة كثافة احتمال $f(X)$ فإن التباين لهذا المتغير يعرف كما يلي:[2]

$$\sigma^2 = var\,(x) = E(x-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)dx \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \;\; f(x)\, dx - \mu^2$$

مثال: بالعودة إلى المثال السابق قم بحساب التباين والانحراف المعياري؟

$$var\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu^2 = \int_{0}^{3} x^2 \;.\frac{1}{9} x^2\, dx \; - \mu^2 = \int_{0}^{3} \frac{1}{9} x^4 dx - \mu^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 - \mu^2 = \frac{1}{9}.\frac{243}{5} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{27}{80} = 0.3375$$

أما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي للتباين:

$$\sigma = \sqrt{var(x)} = \sqrt{\frac{27}{80}} = 0.58$$

مثال: تعطى دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير العشوائي مستمر بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x^2) & ; \quad -1 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{على خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب: 1/ أوجد قيمة الثابت a ؟

2/ أوجد دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ ؟

[1]- جيلالي جلاطو، مرجع سابق، ص 102.

[2]- شفيق العتوم، مرجع سابق، ص 251.

3/ أحسب $p(1/4 \leq x \leq 1/2)$؟

4/ أحسب التوقع الرياضي؟

5/ أحسب التباين والانحراف المعياري؟

الحل: ج 1/ دالة الكثافة الاحتمالية $\Leftarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{-1} 0\, dx + \int_{-1}^{1} a(1 - x^2)\, dx + \int_{1}^{+\infty} 0\, dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1} a(1 - x^2)\, dx = 1 \;\Leftrightarrow a\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow a[(1 - 1/3) - (-1 + 1/3)] = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

ومنه تصبح الدالة بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & ; \quad -1 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{على خلاف ذلك} \end{cases}$$

ج 2/ دالة التوزيع التراكمي (التجميعية):

$$\boldsymbol{F(X) = f(X \leq x) = p(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(X)\, dx}$$

$$F(X) = \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1 - x^2)\, dx \;= \frac{3}{4}[x - x^3]_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < -1 \\ \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2} & ; \quad -1 < x < +1 \\ 1 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

ج 3/ حساب $\boldsymbol{p(1/4 \leq x \leq 1/2)}$

$$p(1/4 \leq x \leq 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} \frac{3}{4}(1 - x^2)\, dx = \frac{3}{4}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{1/4}^{1/2} = \frac{41}{256} = 0.16$$

ج 4/ حساب التوقع الرياضي:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, . \, f(x) \, dx = \int_{-1}^{1} x \left(\frac{3}{4} (1 - x^2) \right) dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} (x - x^3) \, dx$$

$$E(x) = \frac{3}{4} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{1} = 0$$

ج 5/ حساب التباين والانحراف المعياري:

$$var\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f(x) \, dx - \mu^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \, . \left(\frac{3}{4} (1 - x^2) \right) dx \; - \mu^2$$

$$= \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4) \, dx = 3/4 \; \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} = 1/5$$

الانحراف المعياري: أما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي للتباين:

$$\sigma = \sqrt{var(x)} = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0.447$$

تمارين الفصل الرابـــع

التمرين 01: صنف المتغيرات العشوائية التالية إلى متغيرات منفصلة ومتغيرات مستمرة:

1- عدد حوادث المرور في الجزائر خلال السنة؛

2- عدد أهداف الدوري الجزائري لكرة القدم خلال الموسم 2019/2018؛

3- قياس طول لاعبي كرة الطائرة في الدوري الجزائري؛

4- مساحة الأراضي الزراعية بولاية البليدة؛

5- إجراء مسح لمعرفة عدد الأطفال لدى العائلات بولاية البليدة؛

6- إجراء مسح لمعرفة الدخل الشهري لأساتذة جامعة البليدة؟

7- وزن شحنة البضائع؛

التمرين02: الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X:

X	**0**	**1**	**2**
P(X=x)	**...**	**0.3**	**0.4**

المطلوب: 1/ ما هي قيمة $p(X = 0)$؟ 2/ أوجد قيمة التوقع الرياضي؟ 3/ أحسب $p(X > 1)$؟

التمرين 03: الجدول التالي يوضح التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

X	4	6	8
P(X=x)	0.25	0.5	0.25

المطلوب: 1/ أحسب التوقع الرياضي و التباين والانحراف المعياري؟

التمرين 04: إذا ألقيت زهرتي نرد مرة واحدة، ولنعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل مجموع النتيجتين التي تظهر على السطح العلوي للنردين.

المطلوب: 1/ أوجد التوزيع الاحتمالي لـ X ومثله بيانياً؟

2/ أوجد دالة التوزيع التراكمية ومثلها بيانياً؟

3/ أحسب التوقع الرياضي والتباين؟

التمرين 05: الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات المعيبة في الإنتاج اليومي لأحد المصانع:

X	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.75	0.23	0.01	0.005	0.003	0.002

المطلوب: 1/ حساب التوقع الرياضي؟ 2/ التباين والانحراف المعياري؟ 3/ تمثيل التوزيع بيانياً؟

التمرين 06: اشترى شخص أربعة مصابيح لسيارته، فإذا كان احتمال أن تكون أي منها فاسدة هو 0.4، أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد المصابيح الفاسدة؟

- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية وثلها بيانياً؟

- ثم أحسب التوقع الرياضي لعدد المصابيح الفاسدة؟

التمرين 07: أعلنت وزارة التربية و وزارة الصحة على تكوين لجنة من أربعة أفراد لتفقد وضعة المطاعم المدرسية بولاية البليدة، فترشح لهذه اللجنة 6 أفراد من وزارة التربية وأربعة أفراد من وزارة الصحة، فتقرر اختيار اللجنة بطريقة عشوائية.

المطلوب: أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد أفراد وزارة التربية المختارة في اللجنة؟

التمرين 08: في تجربة رمي ثلاثة قطع نقدية، وليكن X يمثل عدد مرات ظهور الصورة H التي حصلنا عليها.

المطلوب: 1/ أكتب التوزيع الاحتمالي لـ X ؛ و أرسم المدرج الاحتمالي؟

2/ أحسب التوقع الرياضي والتباين؟

التمرين 09: إذا كان لدينا كل من $E(x) = 5, Var(x) = 16$ أوجد كل من : $E(y)\ , Var(y)$

حيث : $2)\ \ Y = 3 - \frac{1}{2}\,x$ $\qquad 1)\ \ Y = \frac{1}{2}x - 5$

التمرين 10: وعاء يحتوي على 5 كرات بيضاء و 4 حمراء و 2 سوداء، نقوم بسحب كرتين في آن واحد، نفرض أن الكرة البيضاء تعطي ربحا قدره 5 و الكرة الحمراء تعطي ربحاً قدره 1 ؛ أما الكرة السوداء تعطي خسارة قدرها -3، وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق كل سحبة بمجموع الربحين المتحصل عليهما نتيجة سحب الكريتين (مع العلم بأن الخسارة تعتبر ربحاً سالباً).

المطلوب: 1/ عين قيم المتغير العشوائي؟

2/ ضع جدول التوزيع الاحتمالي لـ X ، ومثله بيانياً؟

3/ أوجد دالة التوزيع التراكمي ، ومثله بيانياً؟

4/ أحسب كل من التوقع الرياضي والانحراف المعياري؟

التمرين11: يحتوي وعاء على 8 كرات تحمل الأرقام التالية: -1 ، -2 ، 0 ، 1 ، 2، 1، 0، 1 ، بحيث لا يمكن التمييز بينها باللمس، نقوم بسحب كرتين بطريقة عشوائية من وعاء، وليكن المتغير العشوائي X يمثل مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين.

المطلوب: 1/ حدد القيم التي يأخذ المتغير العشوائي X؟

2/ حدد دالة التوزيع و مثلها بيانياً؟

3/ أحسب قيمة التوقع الرياضي و الانحراف المعياري؟

التمرين 12: ليكن X المتغير العشوائي والممثل بجدول التوزيع التالي:

X	2	4	5	6	8
P(X=x)	a	a2	a4	b2	b

المطلوب: 1/ أوجد كل من a و b ، مع العلم بأن التوقع الرياضي يساوي 5؟

التمرين 13: إذا كان لدينا الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{على خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب: 1/ أثبت بأنها دالة كثافة احتمالية؟

2/ ثم أرسم التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية؟

3/ أوجد دالة التوزيع التجميعية؟

4/ أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري؟

5/ أحسب: $p(1/6 \leq x \leq 1/4)$؟

التمرين 14: إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\,(x+3) & ; \quad 1 < x < 3 \\ 0 & ; \quad \text{على خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب: 1/ ما نوع المتغير العشوائي؟

2/ أوجد قيمة α حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية؟

3/ أوجد دالة التوزيع التراكمي؟ ومثلها بيانياً؟

4/ أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري؟

5/ احسب كل من ما يلي: ، $p(2 \leq x \leq 2.5)$؛ $p(\,x < 2)$؟

التمرين 15: إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية التي تنتجها إحدى الشركات تتبع التوزيع الاحتمالي الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \beta\, x^2\,(1-x) & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{على خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب: 1/ أوجد قيمة الثابت β حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية؟

2/ أوجد دالة التوزيع التراكمية ومثلها بيانياً؟

3/ أوجد متوسط عمر المصباح وكذلك الانحراف المعياري؟

4/ إذا اختير مصباح عشوائي فما هو احتمال أن يعيش أكثر من 4 شهور؟

حلول تمارين الفصل الرابع

حل التمرين 02: الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X:

X	0	1	2
P(X=x)	**0.3**	0.3	0.4
$x_i.p(x_i)$	**0**	0.3	0.8

ج 1/ ما هي قيمة $p(X=0)$.

$$\begin{cases} \mathbf{f(x) \geq 0} \\ \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{f(x) = 1} \end{cases}$$

$$\sum \boldsymbol{f(x) = p(x=0) + 0.3 + 0.4 = 1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p(x=0) = 1 - 0.7 = 0.3}$$

ج 2/ حساب التوقع الرياضي:

$$\boldsymbol{E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ .p(x_i) = 0(0.3) + 1(0.3) + 2.(0.4) = 1.1}$$

ج 3/ أحسب $p(X>1)$:

$$p(X>1) = 1 - p(x \leq 1) = 1 - 0.3 = 0.7$$

حل التمرين 04: فضاء العينة لتجربة رمي زهرتي نرد هو:

$$\boldsymbol{\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3), \\ (2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3), \\ (5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}}$$

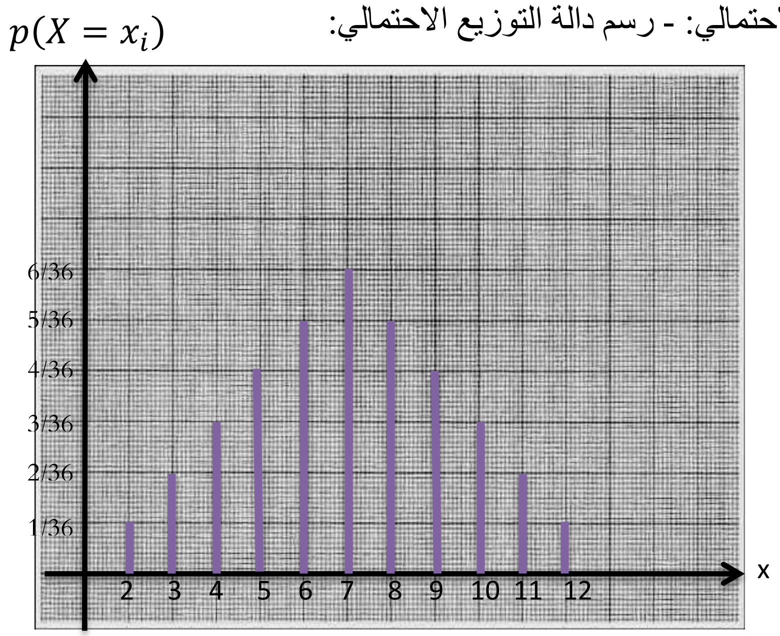
$\boldsymbol{n(\Omega) = 36}$ عدد عناصر الفضاء

$x = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ القيم التي يأخذها x

ج1/ التوزيع الاحتمالي و التمثيل البياني:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$x_i.p(x_i)$	2/36	6/36	12/36	20/36	30/36	42/36	40/36	36/36	30/36	22/36	12/36
$p(X \leq x_i)$	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36
$\boldsymbol{(x_i)^2.p(x_i)}$	4.111	0.5	1.333	2.778	5	8.167	8.889	9	8.333	6.722	4

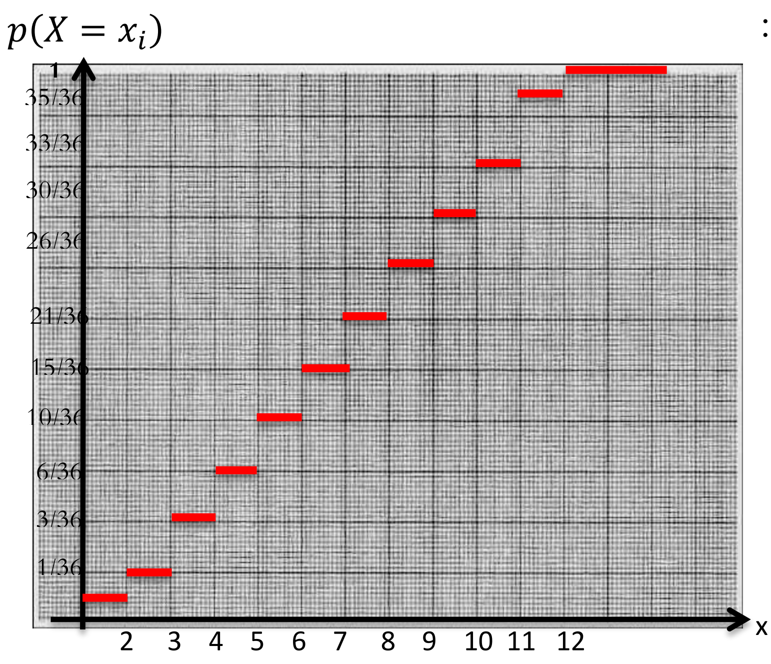
التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي: - رسم دالة التوزيع الاحتمالي:



2/ أوجد دالة التوزيع التراكمية ومثلها بيانياً؟

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1/36 & 2 \le x < 3 \\ 3/36 & 3 \le x < 4 \\ 6/36 & 4 \le x < 5 \\ 10/36 & 5 \le x < 6 \\ 15/36 & 6 \le x < 7 \\ 21/36 & 7 \le x < 8 \\ 26/36 & 8 \le x < 9 \\ 30/36 & 9 \le x < 10 \\ 33/36 & 10 \le x < 11 \\ 35/36 & 11 \le x < 12 \\ 1 & 12 \le x \end{cases}
$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي:



ج 3/ حساب التوقع الرياضي :

$$\boldsymbol{E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ .p(x_i) = \frac{252}{36} = 7}$$

حساب التباين:

$$\boldsymbol{var(x) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2 = 58.833 - (7)^2 = 9.833}$$ قيمة التباين

حل التمرين 10: وعاء يحتوي على 5 كرات بيضاء و 4 حمراء و 2 سوداء، نقوم بسحب كرتين في آن واحد، نفرض أن الكرة البيضاء تعطي ربحا قدره 5 و الكرة الحمراء تعطي ربحاً قدره 1 ؛ أما الكرة السوداء تعطي خسارة قدرها -3، وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق كل سحبة بمجموع الربحين المتحصل عليهما نتيجة سحب الكريتين (مع العلم بأن الخسارة تعتبر ربحاً سالباً).

ج 1/ فضاء العينة هو:

$$s = \{BB\ , BR\ , BN\ , RR\ , RN\ , NN\}$$

$$BB = 5 + 5 = 10\ \ , BR = 5 + 1 = 6\ \ ,\ \ BN = 5 - 3 = 2$$

$$RR = 1 + 1 = 2\quad , RN = 1 - 3 = -2\ \ , NN = -3 - 3 = -6$$

قيم المتغير العشوائي $X = \{10\ , 6\ ,2\ , 2\ , -2\ , -6\}$

ج 2/ جدول التوزيع الاحتمالي لـ X ، ومثله بيانياً.

S	NN	RN	BN , RR	BR	BB
X	-6	-2	2	6	10
P(X=x)	0.0181	0.1454	0.2909	0.3636	0.1818
$x_i.p(x_i)$	-0.1086	-0.2908	0.5818	2.1816	**1.818**
$p(X \le x_i)$	1/55	9/55	25/55	45/55	**55/55**
$\boldsymbol{(x_i)^2.p(x_i)}$	0.6516	0.5816	1.1636	13.0896	**18.18**

$$C_{11}^{2} = \frac{11!}{2!\,(11-2)!} = \frac{9!\,.\,10\,.\,11}{1.2\ \ .9!} = \frac{10.11}{1.2} = 55$$ طريقة

$$C_{5}^{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2\ \ .1.2.3} = 10 \qquad BB$$

$$C_{5}^{1}C_{4}^{1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!}.\frac{4!}{1!\,(4-1)!} = 5.4 = 20 \qquad BR$$

$$C_{5}^{1}C_{2}^{1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!}.\frac{2!}{1!\,(2-1)!} = 5.2 = 10 \qquad BN$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{1.2.3.4}{1.2\ \ .1.2} = \frac{24}{4} = 6 \qquad RR$$

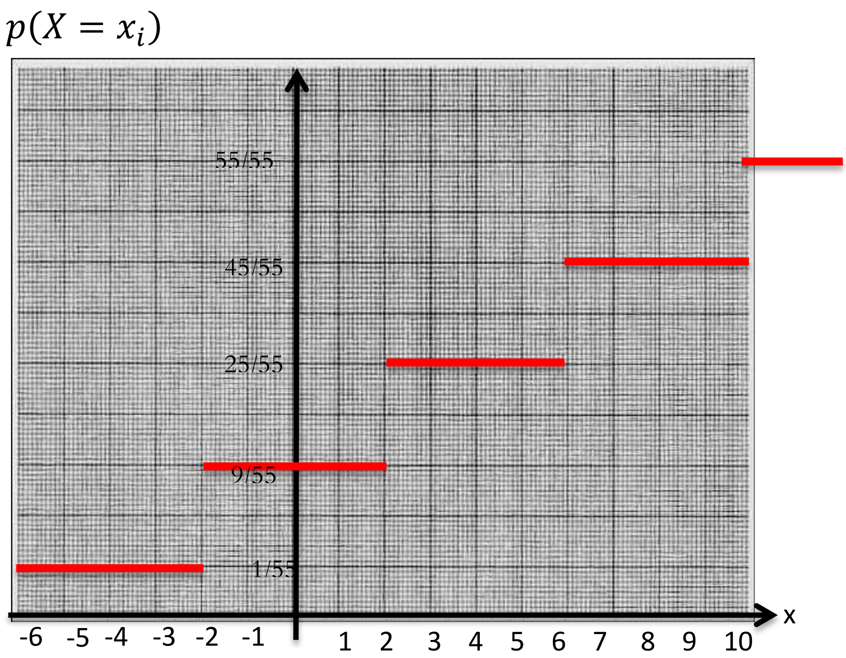
$$C_4^1 C_2^1 = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \cdot \frac{2!}{1!\,(2-1)!} = 4.2 = 8 \qquad RN$$

$$C_2^2 = \frac{2!}{2!\,(2-2)!} = 1 \qquad NN$$

ج 3/ أوجد دالة التوزيع التراكمية ومثلها بيانياً؟

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & x < -6 \\ 1/55 & -6 \le x < -2 \\ 9/55 & -2 \le x < 2 \\ 25/55 & 2 \le x < 6 \\ 45/55 & 6 \le x < 10 \\ 1 & 10 \le x \end{cases}$$

التمثيل البياني:



ج 4/ أحسب كل من التوقع الرياضي والانحراف المعياري؟

$$\boldsymbol{E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ .p(x_i) = 1.818 + 2.1816 + 0.5818 - 0.2908 - 0.1086 = 4.182}$$

حساب التباين:

قيمة التباين $\boldsymbol{var(x) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2 = 33.6664 - (4.182)^2 = 16.1773}$

ومنه فإن الانحراف المعياري يساوي:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\mathrm{var(x)}} = \sqrt{16.1773} = 4.022}$$

حل التمرين 13: إذا كان لدينا الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{على خلاف ذلك} \end{cases}$$

ج $f(x)/1$ دالة كثافة احتمالية :

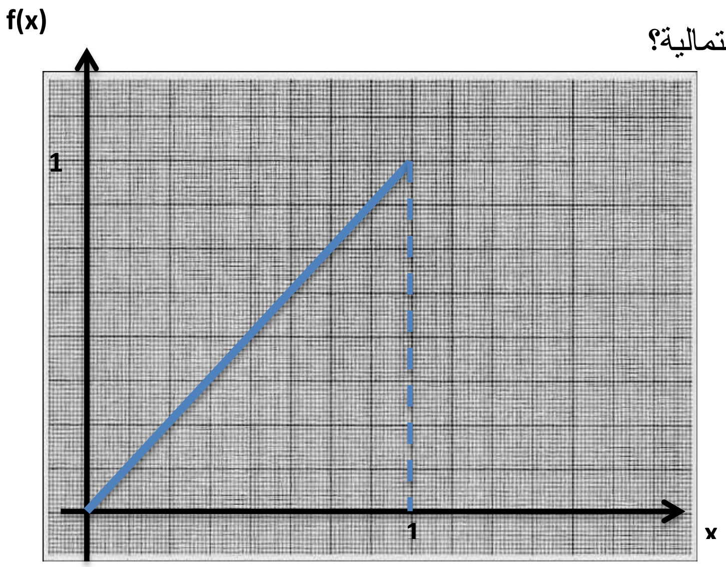
1) $f_X(X) \geq 0 \qquad , \qquad \forall\, x_i \;, \qquad 0 \leq x_i \leq 1$ الشرط الأول محقق

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 2\,x\;dx + \int_{1}^{+\infty} 0\,dx = 1$$

$$\int_{0}^{1} 2\,x\;dx = [x^2]_0^1 = 1$$

ومنه فإن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.

ج2/ أرسم البياني لدالة الكثافة الاحتمالية؟



ج 3/ دالة التوزيع التجميعية:

$$\boldsymbol{F(X) = f(X \leq x) = p(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(X)\,dx} \qquad \Rightarrow$$

$x \in [0 \;\; 1] \quad : \; F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x 2\,x\,dx = \; x^2$

ج 4/ التوقع الرياضي:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,.\,f(x)\,dx = \int_{0}^{1} x\,(\,2\,x\,)dx = 2\int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}[x^3]_0^1 = \frac{2}{3}$$

- حساب التباين والانحراف المعياري:

$$var\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2 = \int_0^1 x^2\ .(2\,x\,)\ dx\ - \mu^2$$

$$= \int_0^1 2\,x^3\quad dx\ - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{2}{4} - \frac{4}{9} = \frac{5}{18}$$

$$\sigma = \sqrt{var(x)} = \sqrt{\frac{5}{18}} = 0.527$$

5/ أحسب: $p(1/6 \le x \le 1/4)$؟

$$p(1/6 \le x \le 1/4) = p(x \le 1/4) - p\left(x \le \frac{1}{6}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) - F\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{36} = \frac{9-4}{144} = \frac{5}{144} = 0.03472$$

حل التمرين 15: : إذا كان لدينا الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \beta\,x^2\,(1-x) & ;\quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & ;\quad \text{على خلاف ذلك} \end{cases}$$

ج 1/$f(x)$ دالة كثافة احتمالية ، نبحث عن قيمة β علماً بأن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.

1) $f_X\,(X) \ge 0 \qquad , \qquad \forall\, x_i\ , \qquad 0 \le x_i \le 1$ الشرط الأول محقق

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^1 \beta\,x^2\,(1-x)\ dx + \int_1^{+\infty} 0\,dx = 1$

$$\int_0^1 \beta\,x^2\,(1-x)\ dx = 1 \ \Rightarrow\ \beta\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1\ \Rightarrow\ \beta\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1\ \Rightarrow \beta\,\frac{1}{12} = 1$$

$$\Rightarrow\ \beta = 12$$

ومنه تصبح الدالة على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 12\,x^2\,(1-x) & ;\quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & ;\quad \text{على خلاف ذلك} \end{cases}$$

ج 2/ دالة التوزيع التراكمية :

$$\boldsymbol{F(X) = f(X \le x) = p(-\infty < X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(X)\,dx} \qquad \Rightarrow$$

$$x \in [0\ \ 1] \quad : F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x 12\, x^2\ (1-x)\ \ dx = \ x^2$$

ج 3/ متوسط عمر المصباح وكذلك الانحراف المعياري:

$$\mathrm{E(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}\,.\,\mathrm{f(x)\ dx} = \int_0^1 \mathrm{x}\ (\ 12\ \mathrm{x}^2\ (1-\mathrm{x})\ \ )\mathrm{dx} = 12 \int_0^1 \mathrm{x}^3 (1-\mathrm{x})\ \mathrm{dx} =$$

$$12 \int_0^1 (\mathrm{x}^3 - \mathrm{x}^4\ )\mathrm{dx} = 12 \left[\frac{\mathrm{x}^4}{4} - \frac{\mathrm{x}^5}{5}\right]_0^1 = 3/5$$

$$var\ (x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\ dx - \mu^2 = \int_0^1 x^2\ \ .\big(12\ \mathrm{x}^2\ (1-\mathrm{x})\big)\ dx\ - \mu^2$$

$$= 12 \int_0^1 (x^4 - x^5)\ dx - \mu^2 = 12\ \ \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= 2/5 - 3/25 = 7/25$$

الانحراف المعياري: أما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي للتباين:

$$\sigma = \sqrt{var(x)} = \sqrt{7/25} = 0.529$$

الفصل الخامس

التوزيعات الإحتمالية المنفصلة

سينصب الاهتمام في هذا المحور على عدد من التوزيعات الاحتمالية المنفصلة على الرغم من وجد عدد كبير منها، والتي لها استخدامات في التطبيقات الاحصائية متعددة الأغراض، والتي يستند عليها متخذ القرار كل حسب تخصصه في ظل عدم التأكد، والتي نذكر منها:

1/ توزيع برنوللي؛

2/ توزيع ذو الحدين؛

3/ توزيع بواسون؛

4/ التوزيع الهندسي؛

5/ التوزيع فوق الهندسي؛

6/ التوزيع المنتظم المنفصل.

1: توزيع برنوللي

يمثل التوزيع برنوللي أو ما يسمى أحياناً تجارب برنوللي باسم مكتشفه الرياضي السويسري "جيمس برنوللي" في نهاية القرن السابع عشر، يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام تسمى بحالة النجاح والأخرى تسمى بحالة الفشل، وهي تمثل الأساس لبناء توزيع ذو الحدين الذي سيأتي ذكره في الفقرة الموالية.

إن المتغير العشوائي (x) لتجربة برنوللي، يأخذ قيمتين فقط هما (0 ، 1) القيمة واحد تمثل حالة النجاح، أما القيمة صفر في تمثل حالة الفشل، ويكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (x) كما يلي:[1]

$$p(X=x)=\begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & x=0,1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مميزات هذا التوزيع:

$$\boldsymbol{\mu(x)=\textstyle\sum_x x\,.\,f_x(x)} \qquad \text{التوقع الرياضي}$$

$$\boldsymbol{\mu(x)=\sum_{x=0}^{x=1} x.\ p^x\,.q^{1-x} \ \Rightarrow\ \mu(x)=(0).p^0\,.q^1+(1).p^1\,.q^0=0+p=p}$$

$$\boldsymbol{v(x)=\ \mu(x^2)-\left(\mu(x)\right)^2=1.p^1p^0-p^2\ =p-\ p^2=p(1-p)}$$

$$\boldsymbol{=p\,.q} \qquad \text{التباين}$$

$$\boldsymbol{\sigma_x=\sqrt{v(x)}=\sqrt{p.q}} \qquad \text{الانحراف المعياري}$$

مثال: تجربة رمي قطعة نقود متزنة هي تجربة برنولية لها نتيجتان إما ظهور الصورة (نجاح) أو الكتابة (الفشل)، وكان المتغير العشوائي (x) يمثل ظهور الكتابة (T).

---

[1]- حسن ياسين طعمة و إيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2012، ص 96.

المطلوب: 1- أكتب دالة التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي (x) مع رسم الدالة؟

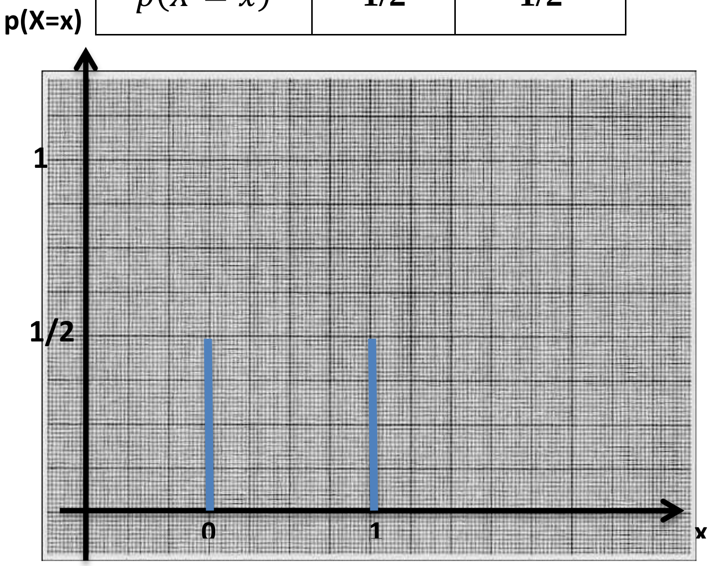
2 – أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري للتوزيع؟

الحل: دالة التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي (x). $p(T) = 1/2$

$$p(X=x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

جدول لدالة التوزيع (x):

x	0	1
$p(X=x)$	**1/2**	**1/2**



2- حساب σ_x , $v(x)$, (x) للتوزيع:

التوقع الرياضي $$\boldsymbol{\mu(x) = \sum_x x\,.\, f_x(x) = p = \frac{1}{2}}$$

التباين $$\boldsymbol{v(x) = p\,.\,q = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$$

الانحراف المعياري $$\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{v(x)} = \sqrt{p.q} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}}$$

2: التوزيع ذو الحدين (التوزيع الثنائي)

يستخدم هذا التوزيع في التجارب العشوائية التي تتكرر (n) مرة والتي ينتج عن أي منها إحدى نتيجتين: إما ظهور الحدث (النجاح) باحتمال ثابت $p(A) = p$ ، و إما عدم ظهور الحدث (إخفاق أو

الفشل) باحتمال $q = 1 - p$ ،[1] ومن أمثلة هذه المحاولات تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة، ستكون إما صورة أو كتابة، أيضا عند قياس جودة المنتجات فستكون إما سليمة أو معيبة، الطالب مجتهد أم غير مجتهد، أصيب الهدف أما لا، هل المولود ذكر أما لا...الخ.

واحتمال حدوث الحدث بالضبط x مرة في n محاولة، أي x مرة نجاح و n-x مرة فشل، يتحقق بالمعادلة التالية:[2]

$$f(x) = p(x = x) = c_x^n \ p^x \ q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \ \ p^x \ q^{n-x}$$

C: التوافيق

n: هي عدد ممارسات دراسة الظاهرة

x: هي الاحتمالات الوارد حدوثها

p: هي النسبة المطلوب دراستها

q: هي النسبة الغير مطلوب دراستها.

بشرط: $0 \le p(x) \le 1 \quad , \quad \sum p(x) = 1 \quad , \quad p(x) \ge 0$

هذا هو التوزيع ذو الحدين بالمعلمتين $\{ , p\}$ وسيكون متوسط وتباين هذا التوزيع كما يلي:[3]

$$E(x) = n\,p$$

$$var(x) = n\,p\,(1-p)$$

- **شروط التوزيع ذو الحدين:** الشروط التي في ظلها يكون المتغير العشوائي له توزيع ذو الحدين هي:[4]

- أن تتكون التجربة من n من المحاولات المتماثلة؛

- نتيجة كل محاولة إما النجاح أو الفشل؛

- المحاولات n مستقلة إحصائياً عن بعضها البعض، وأن إحتمال النجاح p يبقى ثابتا لا يتغير من محاولة إلى أخرى؛

- المتغير العشوائي x يمثل عدد حالات النجاح.

- **تطبيقات توزيع ذو الحدين:** هناك العديد من الدراسات الإحصائية التي تسجل فيها عدد نجاحات خلال سلسلة من المحاولات، ربما يكون أكثر التطبيقات شيوعاً – استعمالا- لأنه يستخدم كنموذج احتمالي للعديد من التوزيعات العشوائية في مجالات العلوم المختلفة، ويلعب دوره في المعاينة العشوائية عندما نرغب في تقدير نسبة المفردات التي تمتلك خاصية معينة، وإليك بعض الأمثلة:

[1]- مبارك أمير ديب، مبادئ في الاحتمالات والاحصاء، 2009، ص 165.

[2] - Prasanna Sahoo, op-cit, p 110.

[3]- حمدي طه، بحوث العمليات ، الجزء الثاني: النماذج الإحتمالية، دار المريخ، السعودية، 2014، ص 808.

[4]- جورج كانافوس و دون ميلر، الإحصاء للتجاريين مدخل حديث، دار المريخ، السعودية، 2004، ص ص 200-201.

- إسقاط طائرة أو عدم إسقاطها؛

- إصابة هدف معين أو عدم إصابته؛

- نسبة العملاء اللذين اشتروا منتج معين؛

- نسبة العملاء اللذين يفضلوا ماركة معينة؛

- نسبة المكالمات التليفونية التي لا تتم بصورة سليمة؛

- نسبة الطلبة بالمدارس الثانوية اللذين يخططوا للإلتحاق بالجامعة؛

- نسبة الناخبين المسجلين واللذين يفضلوا مرشح سياسي معين؛

- نسبة العملاء اللذين يستخدموا بطاقات الائتمان لدفع أثمان مشترياتهم؛

- نسبة العملاء اللذين يحصلوا على خصما عندما تتم مشترايتهم بالبريد؛

- عدد العمليات الناجحة، إذا أجريت العملية الجراحية لعشرين مريضا؛

- نسبة العبوات التي لا تطابق المواصفات من شحنة من أدوية مكونة من 100 عبوه؛

- نسبة الأشجار التي ستصاب بمرض معين في مزرعة فيها 250 شجرة.

مثال: في تجربة رمي قطعة نقود خمسة مرات متتالية، وكان المتغير العشوائي (x) يمثل عدد الصور التي تظهر.

المطلوب: 1/ أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (x)؟

2/ جد إحتمال ظهور 4 صور؟

3/ أحسب القيمة الاحتمالية $p(1 < x \leq 3)$؟

الحل: دالة التوزيع: ظهور الصورة H .

$$\boldsymbol{p(h) = \frac{1}{2}} \quad , \quad \boldsymbol{n = 5} \qquad \boldsymbol{x \sim (5\ , 1/2)}$$

$$\mathrm{f(x = x)} = \begin{cases} \mathrm{c}_{\mathrm{x}}^{5}\ (1/2)^{\mathrm{x}}\ (1-1/2)^{5-\mathrm{x}} \\ 0 \end{cases} \qquad \mathrm{x} = 1\,, 2\,, 3\,, 4\,, 5$$

2/ حساب احتمال ظهور 4 صورة:

$$p(x = 4) = \mathrm{c}_4^5\ (1/2)^4\ (1/2)^1 = \frac{5}{32}$$

3/ أحسب القيمة الاحتمالية:

$$p(1 < x \leq 3) = p(x = 2) + p(x = 3)$$

$$= \mathrm{c}_2^5\ (1/2)^2\ (1/2)^3 + \mathrm{c}_3^5\ (1/2)^3\ (1/2)^2 = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{5}{8}$$

مثال : إذا كانت نسبة الوحدات الإنتاج الرفيعة في أحد المصانع الحقائب الجلدية هي $\left(\frac{5}{7}\right)$، اختيرت عينة من اربعة وحدات، فأحسب التالي:

1/ عدم وجود أي وحدات من النوعية الرفيعة؟

2/ وجود وحدة واحدة من النوعية الرفيعة؟

3/ وجود وحدة واحدة على الأكثر من النوعية الرفيعة؟

4/ حساب المتوسط التوزيع والانحراف المعياري لعدد الوحدات الرفيعة؟

الحل: هذا التوزيع يتبع التوزيع ذو الحدين (الرفيعة والرديئة)

$$p = \frac{5}{7} \text{ الرفيعة} \qquad , \quad q = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \quad \text{ الرديئة} \qquad \mathrm{x} = 1 , 2 , 3 , 4$$

$$\mathrm{p(x = x) = c_x^4\ (5/7)^x\ (2/7)^{4-x}} \qquad \mathrm{x = 1 , 2 ,3 , 4}$$

ج 1/ احتمال عدم وجود أي وحدات من النوعية الرفيعة:

$$\mathrm{p(x = 0) = c_0^4\ (5/7)^0\ (2/7)^{4-0} = 0.00666}$$

ج 2/ احتمال وجود وحدة واحدة من النوعية الرفيعة:

$$\mathrm{p(x = 1) = c_1^4 (5/7)^1\ (2/7)^{4-1} = 0.0666}$$

ج 3/ احتمال وجود وحدة واحدة على الأكثر من النوعية الرفيعة:

$$\begin{aligned}\mathrm{p(x \le 1)} &= \mathrm{p(x = 0) + p(x = 1)} \\ &= \mathrm{c_0^4\ (5/7)^0\ (2/7)^{4-0} + c_1^4 (5/7)^1\ (2/7)^{4-1}} \\ &= 0.00666 + 0.0666 = 0.07329\end{aligned}$$

ج 4/ حساب المتوسط التوزيع والانحراف المعياري لعدد الوحدات الرفيعة:

$$\mu = n\,p = 4\ \left(\frac{5}{7}\right) = 2.857 \quad , \quad \sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{4.\frac{5}{7}\ .\frac{2}{7}} = 0.903$$

3- توزيع بواسون

سمي هذا التوزيع باسم مكتشفه سايمون بواسون ($simeon\ \ poisson$) عام 1837م الفيزيائي والرياضي الفرنسي، ويعتبر واحد من أهم التوزيعات المتقطعة بجانب توزيع ذي الحدين، حيث يستخدم في عدة مجالات منها العلوم الإدارية والإنتاجية ...الخ، وهو توزيع لا نهائي قابل للعد، وله استعمالات في الظواهر المتعلقة بالزمن، مثل عدد المكالمات الهاتفية خلال فترة محددة، عدد الأخطاء المطبعية في صفحة كتاب ما، عدد السيارات المارة في مكان ما خلال فترة زمنية محددة؛ عدد الزلازل السنوية؛ عدد الحوادث الأسبوعية...الخ.

ولإيجاد احتمالات المتغير العشوائي (X) المقابل لهذا التوزيع، فإننا نستخدم العلاقة التالية:[1]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \quad \lambda^{x}}{x!} & , \quad x = 0\,;1\,;2\,\ldots\ldots\ldots \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث e=2.71828183 مقدار ثابت ، و λ متوسط التوزيع، x هو عدد مرات وقوع الحدث المفترض في فترة زمانية أو منطقة المحددة.

خصائص التوزيع: يتميز التوزيع بواسون بالخصائص التالية:[2]

المتوسط $\boldsymbol{\mu(x) = \lambda}$

التباين $\boldsymbol{v(x) = \lambda}$

الانحراف المعياري $\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\lambda}}$

مثال: تعطّل ماكينة لتصنيع الحلوى في المتوسط خمس مرات في الأسبوع ما هو الاحتمال أن تعطل الماكينة ثلاثة مرات خلال الأسبوع؟

الحل: باستخدام توزيع بواسون حيث $\mu = 5 \ , \ x = 3$ فإن:

$$p(3\,,5) = \frac{e^{-5} \quad 5^{3}}{3!} = 0.14037$$

مثال: إذا كان معدل الأشخاص الذين يدخلون العناية المركزة بأحد المستشفيات في يوم ما هو 5.

المطلوب: أحسب الاحتمالات التالية:

1/ أن يدخل وحدة العناية المركزة هذا اليوم خمسة أشخاص؟

2/ أن يدخل وحدة العناية المركزة هذا اليوم أقل من خمسة أشخاص؟

3/ اوجد كل من المتوسط والتباين والانحراف؟

الحل: نعرف المتغير العشوائي X بعدد الأشخاص الذين يدخلون وحدة العناية المركزة، القيم الممكنة هي X= 0 ، 1، 2...، وبذلك يتكون دالة التوزيع هي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-5} \quad 5^{x}}{x!} & , \quad x = 0\,;1\,;2\,\ldots\ldots\ldots \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ج 1/ احتمال أن يدخل وحدة العناية المركزة هذا اليوم خمسة أشخاص.

$$p(x = 5) = \frac{e^{-5} \quad 5^{5}}{5!} = 0.175$$

[1]- مبارك أمير ديب، مبادئ في الاحتمالات والاحصاء، 2009، ص 169.

[2]- جلال الصياد، مرجع سابق، ص 73

ج 2/ احتمال أن يدخل وحدة العناية المركزة هذا اليوم أقل من خمسة أشخاص.

$$p(x<5)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)$$
$$=\frac{e^{-5}\quad 5^0}{0!}+\frac{e^{-5}\quad 5^1}{1!}+\frac{e^{-5}\quad 5^2}{2!}+\frac{e^{-5}\quad 5^3}{3!}+\frac{e^{-5}\quad 5^4}{4!}$$
$$=0.0067+\ 0.0335+0.1675+0.13958+0.17447=0.5217$$

ج 3/ حساب المتوسط والتباين والانحراف.

المتوسط $$\boldsymbol{\mu(x)=5}$$

التباين $$\boldsymbol{v(x)=\ 5}$$

الانحراف المعياري $$\boldsymbol{\sigma_x=\sqrt{v(x)}=\sqrt{5}\ \ =2.236}$$

4- التوزيع الهندسي

يقال أن المتغير العشوائي X له توزيع هندسي إذا كانت التجارب هي تجارب برنولي بمعنى أن نتيجة كل تجربة أما نجاح باحتمال (p) أو فشل باحتمال $(1-p)$كما أن احتمال النجاح ثابت من تجربة إلى أخرى وكل تجربة مستقلة عن التجارب الأخرى والمتغير X هو عبارة عن عدد التجارب اللازمة للحصول على أول نجاح، بمعنى أن عدد التجارب غير محدد من البداية كتوزيع ذي الحدين، وإذا تحققت هذه الشروط فإن المتغير X له توزيع هندسي وتكون دالة احتماله على الشكل التالي:[1]

$$p(X=x)=\begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x=1,2,3,\ldots\ldots\infty \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

خصائص التوزيع الهندسي: إن الوسط الحسابي والتباين و الانحراف المعياري، هي على النحو التالي:

المتوسط $$\boldsymbol{\mu(x)=E(x)=\frac{1}{p}}$$

التباين $$\boldsymbol{v(x)=\ \frac{1-p}{p^2}}$$

الانحراف المعياري $$\boldsymbol{\sigma_x=\sqrt{v(x)}=\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}}$$

مثال: يصوب شخص بندقيته نحو هدف معين ويطلق عدة طلقات نارية، واحتمال أن يصيب الهدف في كل طلقة هو 0.6 ولا يتوقف عن اطلق إلى غاية إصابة الهدف لأول مرة.

المطلوب:

1/ أكتب دالة التوزيع لهذا المتغير؟

[1]- حسن ياسين طعمة و إيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي**، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2012، ص 116.

2/ ما احتمال إصابة الهدف في الطلقة 7 حتى يتوقف الشخص عن اطلق النار؟

3/ ما احتمال إصابة الهدف في الطلقة 3 حتى يتوقف الشخص عن اطلق النار؟

4/ ما احتمال إصابة الهدف بالطلقة الثالثة على الأكثر حتى يتوقف الشخص عن اطلق النار؟

الحل: ج 1/ دالة التوزيع هي: علما بأن X يعطينا عدد مرات إطلق النار نحو الهدف حتى الإصابة.

$$p(X=x)=\begin{cases} 0.6\ \ (1-0.6)^{x-1} & x=1,2,3,\ldots\ldots\infty \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ج 2/ احتمال إصابة الهدف في الطلقة 7 حتى يتوقف الشخص عن اطلق النار.

$$p(x=7)=0.6\ \ (1-0.6)^{7-1}=0.6\ (0.4)^6=0.0024576$$

ج 3/ احتمال إصابة الهدف في الطلقة 3 حتى يتوقف الشخص عن اطلق النار.

$$p(x=3)=0.6\ \ (1-0.6)^{3-1}=0.6\ (0.4)^2=0.096$$

ج 4/ احتمال إصابة الهدف بالطلقة الثالثة على الأكثر حتى يتوقف الشخص عن اطلق النار.

$$\begin{aligned} p(x\le 3) &= p(x=1)+p(x=2)+p(x=3) \\ &= 0.6\ \ (0.4)^0+0.6\ \ (0.4)^1+0.6\ \ (0.4)^2=0.6+0.24+0.096 \\ &= 0.936 \end{aligned}$$

تمارين الفصل الخامس

التمرين 01: وعاء به 12 حبة من التمر منها اربعة حبات فاسدة، اخترنا منه حبتين من التمر، أحسب احتمال أن تكون واحدة فاسدة (السحب بإرجاع)؟

التمرين 02: في تجربة رمي قطعة نقود سبعة مرات متتالية، وكان المتغير العشوائي (x) يمثل عدد الصور التي تظهر.

المطلوب: 1/ أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (x)؟

2/ جد إحتمال ظهور 3 صور؟

3/ أحسب القيمة الاحتمالية $p(2 \leq x \leq 5)$؟

4/ أحسب المتوسط الحسابي والتباين ؟

التمرين 03: في شهر ما قدم مندوب شركة تأمين عروض تأمين على الحياة لـ 20 من العملاء المحتملين، وجد تاريخيا أن واحداً من كل خمسة يشتروا فعلا وثيقة تأمين من هذا المندوب، مستخدماً توزيع ذو الحدين، أجب عن الأسئلة الأتية الخاصة بنشاط هذا المندوب في الشهر القادم:

1- ما هو احتمال أن اثنين على الأقل من العملاء يشتروا وثائق تأمين على الحياة في الشهر القادم؟

2- ما هو احتمال أنه لن يزيد عن أربعة عملاء يشتروا وثائق تأمين في الشهر القادم؟

3- ما هو احتمال أن أربعة عملاء بالضبط يشتروا وثائق تأمين في الشهر القادم؟

4- حدد المتوسط؛ التباين؛ الانحراف المعياري لعدد العملاء يشتروا وثائق تأمين على الحياة الشهر القادم؟

(اختبر نفسك) (0.9308 ؛ 0.6296 ؛ 0.2182 ؛ $\mu = 4$, $\sigma^2 = 3.2$, $\sigma = 1.79$)

التمرين 04: إذا كان عدد حوادث السيارات في مدينة معينة يتبع التوزيع البواسوني بمتوسط 7 حوادث خلال الأسبوع، إذا افترضنا أن X متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السيارات خلال الأسبوع.

المطلوب: 1/ حدد شكل دالة التوزيع لهذا المتغير؟

2 / أحسب الاحتمالات التالية:

- ما هو احتمال حدوث حدثين خلال الأسبوع؟
- ما هو احتمال حدوث حادث واحد على الأقل خلال الأسبوع؟
- ما هو احتمال حدوث ثلاثة حوادث على الأكثر خلال الأسبوع؟

3/ أحسب كل من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري لعدد الحوادث؟

التمرين 05: إذا كان احتمال أن يعاني شخص معين كرد فعل سيئ لإعطائه حقنة من دواء معين هو 0.001، أحسب احتمال أنه من بين 2000 شخص: يوجد بالضبط 3 يعانون من حقنة هذا الدواء، ثم يوجد أكثر من 2 يعانون من الحقن بهذا الدواء. (اختبر نفسك)

$p(X > 2) = 0.323\ ,\ p(x = 3) = 0.180$

التمرين 06: إذا كان متوسط عدد الأخطاء المطبعية خلال صفحات أحدى الكتب هو 4 أخطاء، أوجد:

1/ شكل دالة التوزيع؟

2/ احتمال عدم وقوع أي خطأ في الكتب؟

3/ احتمال ظهور ثلاثة أخطاء ضمن الكتاب؟

4/ احتمال ظهور خطأين على الأكثر؟

5/ احتمال ظهور خطأين على الأقل؟

التمرين 07: إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهرياً، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب: 1/ أكتب دالة التوزيع الاحتمالية لهذا المتغير؟

2/ أحسب احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟

3/ أحسب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحدة على الأقل خلال الشهر؟

4/ أحسب احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟

5/ أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة؟

(اختبر نفسك) (دالة التوزيع ، 0.22404 ، 0.9502 ، 0.6474 ، $\boldsymbol{\mu(x) = 3}$، $\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{3}}$)

التمرين 08: صندوق يحوي 10 كرات حمراء و 6 كرات خضراء، نسحب كرة من صندوق مع إعادة ونعيد السحب حتى تظهر الكرة الخضراء لأول مرة.

المطلوب: 1/ أكتب دالة التوزيع لهذا المتغير؟

2/ ما احتمال تكرار التجربة للمرة الرابعة حتى تظهر لنا الكرة الخضراء؟

3/ أحسب المتوسط الحسابي و التباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع؟

التمرين 09: تم تسجيل بمصلحة الوفيات بإحدى مستشفيات مدينة البليدة 12 وفيات في اليوم، احسب احتمال تسجيل 7 وفيات في يوم مختار عشوائياً.

التمرين 10: وجد في إنتاج أحد المصانع أنه من بين 1000 وحدة إنتاج يوجد 150 وحدة معيبة، أخذت عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات، أوجد الاحتمالات التالية:

1/ الوحدات المختارة كلها سليمة؟ **(0.4437)**

2/ على الأكثر توجد وحدة واحدة معيبة؟ **(0.8352)**

3/ على الأقل توجد وحدتان عيبتان؟ **(0.1684)**

التمرين 11: في كمية كبيرة من القطع المصنعة، وكان معلوما أن بها نسبة 0.3% من القطع المعيبة، أخذت منه عينة بإرجاع عشوائية حجمها 350 قطعة، أحسب الاحتمالات التالية:

1/ وجد قطعة معيبة؟ **(0.367)**

2/ وجود قطعتان معيبتان؟ **(0.193)**

3/ عدم وجود أية قطع معيبة؟ **(0.350)**

4/ وجود على الأكثر وحدتان معيبتان؟ **(0.91)**

التمرين 12: إذا كان عدد الأخطاء المطبعية في كتاب يتكون من 600 صفحة هو 50 خطأ فإذا كانت الأخطاء تتوزع توزعا عشوائياً.

فما احتمال إذا اختيرت 10 صفحات عشوائياً أن لا تحتوي على أخطاء؟ **(0.436)**

حلول تمارين الفصل الخامس

حل التمرين 01: بفرض أن x متغير عشوائي يمثل عدد حبات التمر الفاسدة ولها دالة:

$$f(x)=p(x=x)=\binom{n}{x}\ p^x\ q^{n-x}=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\ \ p^x\ q^{n-x}$$

وعلى ذلك فان الاحتمال المطلوب هو:

$$p=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\qquad ;\qquad q=\frac{8}{12}=2/3$$

$$p(x=1)=\binom{2}{1}(2/12)^1\ \ (8/12)^{2-1}=\frac{2!}{1!\,(2-1)!}\ (2/12)^1\ \ (8/12)^{2-1}$$

$$=2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=0.222$$

حل التمرين 04: بما أن متوسط عدد الحوادث خلال الأسبوع هو 7، و X متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السيارات خلال الأسبوع، فإن دالة التوزيع تأخذ الشكل التالي:

$$f(\mathrm{x})=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{-7}\quad 7^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}!} & ,\quad x=0\,;1\,;2\ \ldots\ldots\ldots\\ 0 & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

ج 2/ حساب الاحتمالات التالية:

$$p(x=2)=\frac{\mathrm{e}^{-7}\quad 7^2}{2!}=\frac{0.000911882\ .\ 7.7}{1.2}=0.04468$$

$$p(x\geq 1)=p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)\ \ldots\ldots=1-p(x=0)$$

$$=1-\frac{\mathrm{e}^{-7}\quad 7^0}{0!}=1-0.000911882\ =0.99908$$

$$p(x\leq 3)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-7}\quad 7^0}{0!}+\frac{\mathrm{e}^{-7}\quad 7^1}{1!}+\frac{\mathrm{e}^{-7}\quad 7^2}{2!}+\frac{\mathrm{e}^{-7}\quad 7^3}{3!}$$

$$=0.00091+0.00638+0.02234+0.05212=0.08175$$

ج 3/

المتوسط $\boldsymbol{\mu(x)=7}$

التباين $\boldsymbol{v(x)=\ 7}$

الانحراف المعياري $\boldsymbol{\sigma_x=\sqrt{v(x)}=\sqrt{7}\ \ =2.6457}$

حل التمرين 06: X (الحدث): عدد الأخطاء المطبعية.($\lambda = 4$)

X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم 0، 1، 2، 3 ....ويتبع توزيع بواسون الذي دالته الاحتمالية:

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{e^{-4} \quad 4^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}\,!} & , \quad x = 0\,;1\,;2 \dots\dots\dots \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ج 2/ عدم وقع أي خطأ ($p = 0$):

$$p(x = 0) = \frac{e^{-4} \quad 4^0}{0!} = 0.018$$

ج3/ وقوع ثلاثة حوادث ($p = 3$):

$$p(x = 3) = \frac{e^{-4} \quad 4^3}{3!} = 0.19536$$

ج 4/ احتمال ظهور خطأين على الأكثر.

$$p(x \leq 2) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2)$$
$$= \frac{e^{-4} \quad 4^0}{0!} + \frac{e^{-4} \quad 4^1}{1!} + \frac{e^{-4} \quad 4^2}{2!}$$
$$= 0.0183 + 0.0732 + 0.1465 = 0.238$$

ج 5/ احتمال ظهور خطأين على الأقل.

$$p(x \geq 2) = 1 - p(x = 0) + p(x = 1) = 1 - \frac{e^{-4} \quad 4^0}{0!} + \frac{e^{-4} \quad 4^1}{1!}$$
$$= 1 - \ 0.0183 + 0.0732 = 0.9085$$

حل التمرين 08: X عدد مرات تكرار التجربة حتى ظهور الحدث المفترض (A حدث سحب كرة خضراء). $p(A) = \frac{6}{16} \quad , q = 1 - p = \frac{10}{16}$

$$p(X = x) = \begin{cases} \dfrac{6}{16} \left(\dfrac{10}{16}\right)^{x-1} & x = 1, 2, 3, \dots\dots \infty \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ج2/ ما احتمال تكرار التجربة للمرة الرابعة حتى تظهر لنا الكرة الخضراء.

$$p(X = 4) = \frac{6}{16} \left(\frac{10}{16}\right)^{4-1} = \frac{6}{16} \left(\frac{10}{16}\right)^3 = 0.09155$$

ج 3/ أحسب المتوسط الحسابي و التباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

المتوسط
$$\mu(x) = E(x) = \frac{1}{\frac{6}{16}} = \frac{16}{6} = 2.666$$

التباين
$$v(x) = \frac{1 - \frac{6}{16}}{\left(\frac{6}{16}\right)^2} = \frac{10}{16} \cdot \frac{256}{36} = 4.444$$

الانحراف المعياري
$$\sigma_x = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \sqrt{4.444} = 2.108$$

الفصل السادس
التوزيعات الإحتماليـة المستمرة

سوف نتطرق في هذا الفصل إلى بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الأكثر استعمالا في النماذج الإحصائية والاحتمالية، ألا وهي التوزيعي الطبيعي؛ والتوزيع الطبيعي المعياري، والتوزيع ذو الحدين باستعمال التقريب لتوزيع الطبيعي المعياري.

1- التوزيع الطبيعي

يعتبر التوزيع الطبيعي من الأعمدة الأساسية في موضوعات الإحصاء، وهو أهم التوزيعات المستمرة على الإطلاق من حيث تطبيقاته الكثيرة والمتنوعة في مجالات مختلفة، وقد اشتق اسمه من أن كثيرا من التوزيعات الإحصائية للظواهر الطبيعية تأخذ شكلا قريبا منه، ويستخدم في الكثير من التجارب الصناعية واختبارات الجودة؛ واختبارات الفروض والعينات الكبيرة وتوزيعات المعاينة وغيرها.

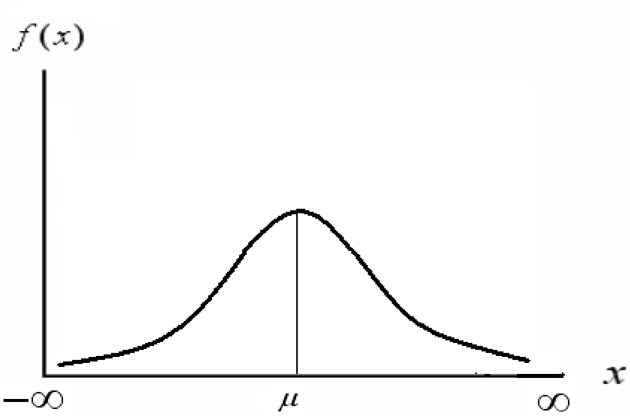
يعود الفضل باكتشافه هذا التوزيع إلى العالم الرياضي الانجليزي "دي مويفر De Moiver" عام 1733م، وكان أول من استخدم لتوزيع الطبيعي في دراسة الأخطاء المحتملة في القياس، كل من العالمين الرياضيين "لابلاس و غوس عام 1809،[1] ولهذا التوزيع خواصه الرياضية ويمكن أن يكون تقريبا أو حالة خاصة لتوزيعات أخرى مثل توزيع ثنائي الحدين.

تعطى دالة كثافة الاحتمالية لتوزيع الطبيعي بالشكل التالي:[2]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

حيث: $\boldsymbol{\sigma}$ و $\boldsymbol{\mu}$ هما ثابتان، $\pi = 3.14159$ و $e = 2.71828183$ ، ومداه يبلغ المجال $-\infty < \mathbf{X} < +\infty$، وإن منحنى هذه الدالة يأخذ الشكل الجرسي متماثل حول نقطة مركزية هي $\boldsymbol{\mu}$ ، بحيث أن المساحة تحت المنحنى تساوي واحد، ونرمز للتوزيع الطبيعي بــ $\boldsymbol{N}\ (\boldsymbol{\mu}\ ,\boldsymbol{\sigma^2})$:

الشكل (): شكل المنحنى التوزيع الطبيعي



المميزات العددية لهذا التوزيع هي:

[1]- حسن ياسين طعمة و إيمان حسين حنوش، مرجع سابق، ص 138.

[2]- ثروت محمد عبدالمنعم، مرجع سابق، ص 160.

$\boldsymbol{E(x) = \mu}$ المتوسط, $\boldsymbol{v(x) = \sigma^2}$ التباين ,$\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{\sigma^2} = \sigma}$ الانحراف المعياري

إن التوزيع الطبيعي هو قانون توزيع احتمالي، وبالتالي من أجل أن يكون X توزيعاً احتماليا لا بد من تحقق الشرطان التاليان:[1]

$$1) \qquad 0 \leq f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \leq 1$$

$$2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 1$$

2- التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي)

يعرف التوزيع الطبيعي المعياري بأنه التوزيع الطبيعي الذي وسطه صفر وتباينه واحد، أي أن المتغير العشوائي ( ) يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري إذا كان توزيع Z التوزيع الطبيعي ذا الوسط $\mu = 0$ والتباين $v(x) = \sigma^2 = 1$ ونعبر عنه بالرمز $Z : N(0\,,1)$

وإذا كان X متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي ذي الوسط μ والتباين 2   فيمكن تحويل X إلى متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري باستخدام العلاقة التالية:[2]

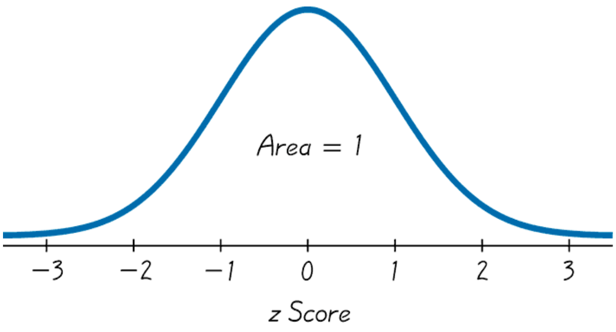
نضع $$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

إذ أن لكل قيمة لـ X تقابلها قيمة لـ Z، لذا تصبح دالة التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(Z)^2}$$

ويمكن تمثيل دالة التوزيع كما يلي:



[1]- جيلالي جلاطو ، مرجع سابق، ص 215.
[2]- محمد حسين محمد رشيد و منى عطا الله الشويلات، مرجع سابق، ص 345.

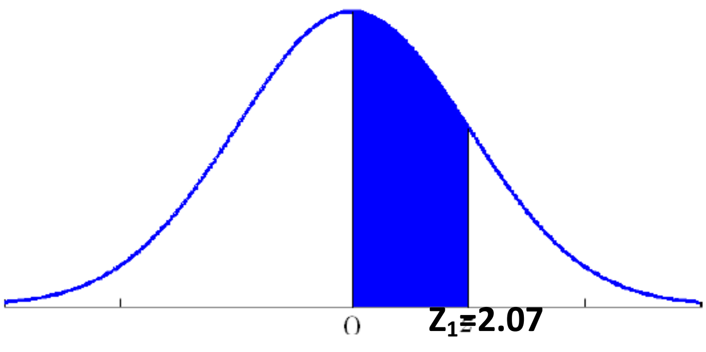
من الفصل السابق للمتغير العشوائي المستمر نتذكر أن دالة التوزيع التجميعية (التراكمية) مثل $f(x : \mu, \sigma)$ تمثل ذلك الجزء من المساحة تحت منحنى دالة كثافة احتمالية للتوزيع الطبيعي والمحدد من على اليمين بقيمة معينة X. كما رأينا كيف تستخدم دالة التوزيع التجميعية لمتغير العشوائي المتصل في تحديد احتمالات عن فترة لهذا المتغير. ومما يؤسف له أنه حتى الآن لا يوجد أحد قادراً على تقديم دالة التجميعية للتوزيع الطبيعي في صورة رياضية يمكن استخدامها بسهولة.

ولحسن الحظ من الممكن تحديد الاحتمالات عن فترة لأي متغير له توزيع طبيعي بالرجوع إلى جدول توزيع طبيعي واحد فقط وهو مهم جداً يعرف باسم التوزيع الطبيعي المعياري أو القياسي، وسوف نوضح في ما يلي كيفية استخراج المساحات باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعيار (الملحق رقم 01).

كيفية استخراج المساحات باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري

يعطينا جدول التوزيع الطبيعي المعياري المساحة الواقعة تحت المنحنى بين $Z = 0$ و أي قيمة موجبة أخرى لـ Z، كما يمكننا الاستفادة من خاصية التماثل في هذا التوزيع من تحويل وحدات Z السالبة إلى وحدات موجبة. مع العلم بأن الجداول الخاص بالتوزيع الطبيعي تختلف في مبدأ الحساب منها مثلا عند النقطة 0.00 و 0.0 نجد القيمة في الجدول 0.000 ، ومنها ما نقرأ عندها القيمة 0.500، وبما أن المنحنى متناظر نعتمد على الجدول الذي يطينا القيمة 0.00 في أول خانة.

الحالة 01: المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي القياسي بين $Z = 0 ;\ \ Z = Z_1$ وتكتب بالصيغة التالية: $p(Z_1) = p(0 < Z < Z_1)$ المساحة بين الوسط $Z = 0$ و قيمة $Z = Z_1$ (على اليمين) كما في الشكل التالي:

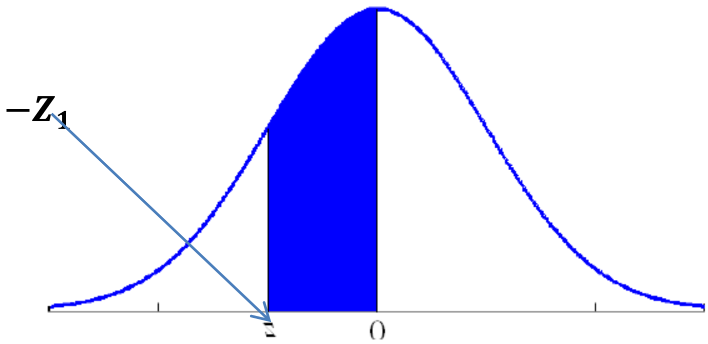


مثلا أوجد المساحة التالية: $p(0 < Z < 2.07)$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.000	0.004	0.008	0.120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	**0.1064**	0.1103	0.1141
.										
2	0.4772	0.1778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
.										
3	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

$$p(0 < Z < 2.07) = \mathbf{0.1064}$$

الحالة 2: المساحة الواقعة تحت المنحنى التوزيع الطبيعي القياسي بين $Z = -Z_1$; $Z = 0$ وتكتب بالصيغة التالية: $p(Z_1) = p(-Z_1 < Z < 0)$ المساحة بين الوسط $Z = 0$ و قيمة $Z = -Z_1$ (على يسار الوسط) كما في الشكل التالي:

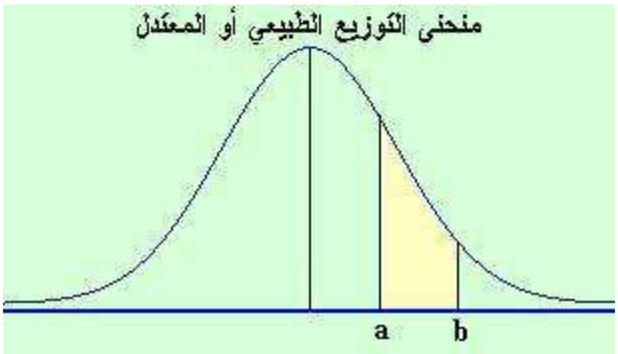


نتيجة التماثل نلاحظ بأن هذه المساحة تساوي نفس المساحة التي في الحالة الأولى:

مثلا أوجد المساحة التالية: $p(-2.07 < Z < 0)$

$$p(-2.07 < Z < 0) = p(0 < Z < 2.07) = \mathbf{0.1064}$$

الحالة 03: المساحة الواقعة بين قيمتين معياريتين موجبتين $p(\quad _1 < Z < Z_2)$ والمساحة المطلوبة هي المنطقة المظللة في الشكل التالي: $(Z_1 = a \quad , Z_2 = b)$



المساحة المطلوبة تُحسب بالطريقة التالية:

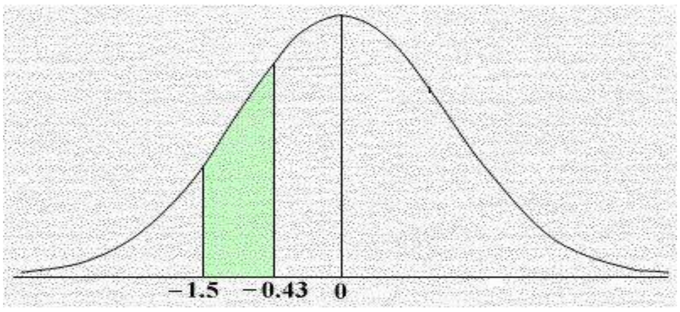
$$p(Z_1 < Z < Z_2) = p(0 < Z < Z_2) - p(0 < Z < Z_1)$$

المساحة الصغرى – المساحة الكبرى =

مثال أوجد المساحة $p(1 < Z < 2)$؟

$$p(1 < Z < 2) = p(0 < Z < 2) - p(0 < Z < 1) = 0.4772 - 0.3413$$
$$= 0.1359$$

الحالة 04: المساحة الواقعة بين قيمتين معياريتين سالبتين $p(-Z_1 < Z < -Z_2)$ والمساحة المطلوبة هي المنطقة المظللة في الشكل التالي: $(Z_1 = -a = -0.43 \quad , \quad Z_2 = -b = -1.5)$



المساحة المطلوبة تُحسب بالطريقة التالية:

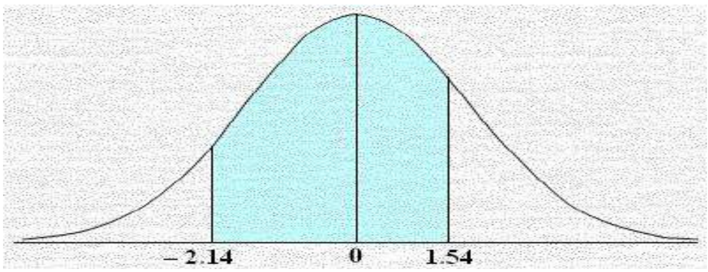
$$p(-Z_1 < Z < -Z_2) = p(0 < Z < -Z_2) - p(0 < Z < -Z_1)$$

المساحة الصغرى – المساحة الكبرى =

مثال أوجد المساحة $p(-0.43 < Z < -1.5)$؟

$$p(-0.43 < Z < -1.5) = p(0 < Z < -1.5) - p(0 < Z < -0.43)$$
$$= p(0 < Z < 1.5) - p(0 < Z < 0.43) = 0.4332 - 0.1664$$
$$= 0.2668$$

الحالة 5: المساحة الواقعة بين قيمتين معياريتين $p(-Z_1 < Z < +Z_2)$ والمساحة المطلوبة هي المنطقة المظللة في الشكل التالي: $(Z_1 = -a = -2.14 \quad , \quad Z_2 = +b = 1.54)$



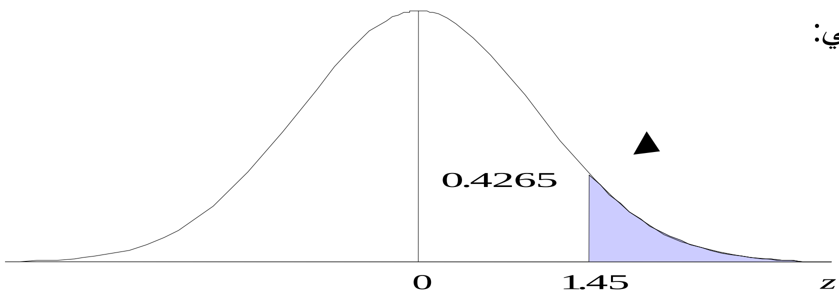
المساحة المطلوبة تُحسب بالطريقة التالية:

$$p(-Z_1 < Z < Z_2) = p(Z_1) + p(Z_2)$$

مثال أوجد المساحة $p(-2.14 < Z < 1.54)$؟

$$p(-2.14 < Z < 1.54) = p(0 < Z < 2.14) + (p(0 < Z < 1.54)$$
$$= 0.4838 + 0.4382 = 0.922$$

الحالة 06: المساحة الواقعة على يمين Z الموجبة $p(Z > Z_1)$ والمساحة المطلوبة هي المنطقة المظللة في الشكل التالي:



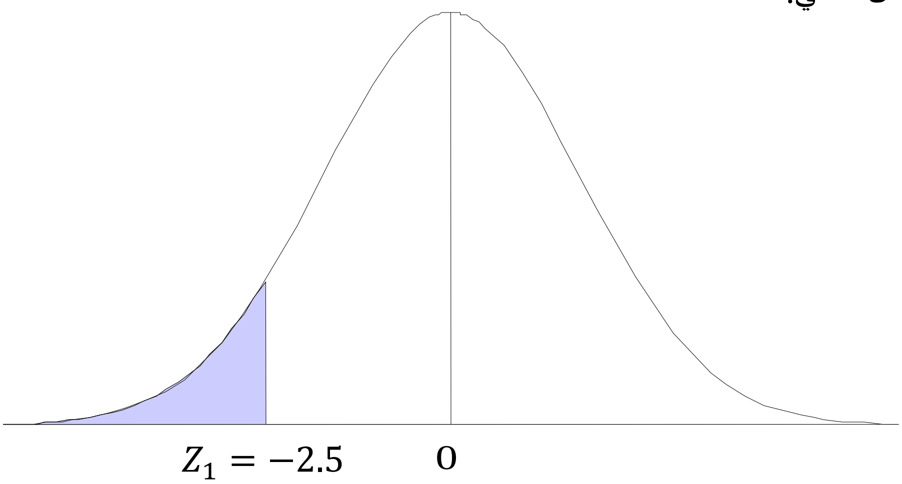
المساحة المطلوبة تُحسب بالطريقة التالية:

$$p(Z > Z_1) = 0.5 - p(Z_1)$$

مثال أوجد المساحة $p(Z > 1.45)$؟

$$p(Z > 1.45) = 0.5 - p(0 < Z < 1.45) = 0.5 - 0.4265 = 0.0735$$

الحالة 07: المساحة الواقعة على يسار Z السالبة $p(Z < -Z_1)$ والمساحة المطلوبة هي المنطقة المظللة في الشكل التالي:



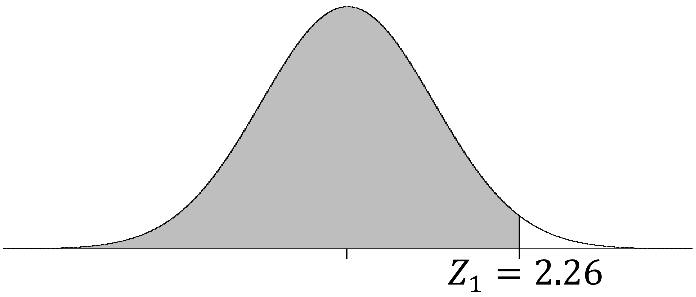
المساحة المطلوبة تُحسب بالطريقة التالية:

$$p(Z < -Z_1) = p(Z > Z_1) = 0.5 - p(Z_1)$$

مثال أوجد المساحة $p(Z < -2.5)$؟

$$p(Z < -2.5) = p(Z > -2.5) = 0.5 - p(0 < Z < 2.5) = 0.5 - 0.4938$$
$$= 0.0062$$

الحالة 8: المساحة الواقعة على يسار Z $p(Z < Z_1)$ والمساحة المطلوبة هي المنطقة المظللة في الشكل التالي:



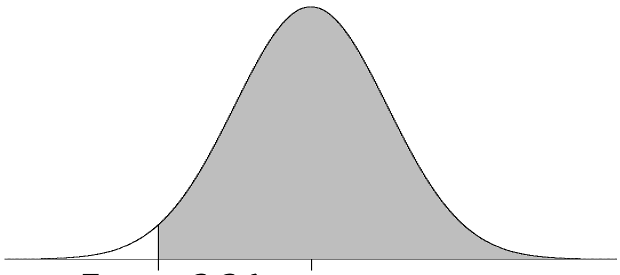
المساحة المطلوبة تُحسب بالطريقة التالية:

$$p(Z < -Z_1) = p(Z > Z_1) = 0.5 + p(Z_1)$$

مثال أوجد المساحة $p(Z < 2.26)$؟

$$p(Z < 2.26) = 0.5 + p(0 < Z < 2.26) = 0.5 + 4881 = 0.9881$$

الحالة 8: المساحة الواقعة على يمين القيمة Z $p(Z > -Z_1)$ والمساحة المطلوبة هي المنطقة المظللة في الشكل التالي:



$Z_1 = -2.26$

نتيجة التماثل فإن المساحة المطلوبة تُحسب بالطريقة التالية:

$$p(Z > -Z_1) = p(Z < Z_1) = 0.5 + p(Z_1)$$

مثال أوجد المساحة $p(Z > -2.26)$؟

$$p(Z > -2.26) = 0.5 + p(0 < Z < 2.26) = 0.5 + 4881 = 0.9881$$

3- تقريب التوزيع ذو الحدين بالتوزيع الطبيعي المعياري

لقد اقتصرت الأمثلة المطروحة في التوزيع الثنائي في ما سبق على الحالات التي يكون فيها حجم n صغيرة جدا؛ وهذا بهدف تفادي المعاناة الناتجة عن حساب الاحتمال $\mathrm{p}(X)$ عندما تكون n كبيرة جدا، إلا أن الواقع لا يستبعد وجود ظواهر تكون فيها n كبيرة جداً، ولهذا فقد اهتم الإحصائيون بهذه الأشكال وعلى رأسهم الرياضي الإنجليزي دوموافر De Moivre فاكتشف هذا الأخير أن التوزيع الطبيعي هو النهاية الحدية للتوزيع الثنائي، وهذا ما أكده فيما بعد العالم الفرنسي لابلاس Laplace.[1]

إذا كان X متغير يتبع التوزيع ذو الحدين $\boldsymbol{x \sim (n\ ,p)}$ فإنه يمكن تقريب التوزيع **X** بالتوزيع الطبيعي ذي المتوسط $\boldsymbol{E(x) = \mu = np}$ و التباين $\boldsymbol{\sigma^2 = np(1-p)}$ عندما تكون **n** كبيرة جداً، **p** قريبة من 0.5 ، وبعبارة أخرى فإن التوزيع المتغير $\boldsymbol{z = \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}}$ يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري$\boldsymbol{N(0\ ,1)}$.

إن فكرة تقريب بعض التوزيعات الاحتمالية تستند أساساً على إمكانية استخدام توزيعين أو أكثر في حساب قيمة احتمالية معينة، وهنا يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين إذا تحققت الشروط التالية:[2]

- حجم العينة يكون كبير جداً $(n \geq 30)$.
- المتوسط يكون أكبر من أو يساوي 5 $(\mu = np \geq 5)$.
- التباين يكون أكبر من أو يساوي 5 $(\sigma^2 = np(1-p) \geq 5)$.

---

[1]- السعدي رجال، **نظرية الإحتمالات**، الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1995، ص ص 188-190.

[2]- لحسن عبدالله باشيوة، مرجع سابق، ص 300.

مثال: لنأخذ التوزيع الثنائي في حالة $(n = 10)$ و $p = 1/2$ وعندئذ يكون $(\mu = n\,p = 5)$ و $\left(\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10\ .\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = 1.58\right)$ أحسب $\boldsymbol{p(2 \le x \le 4)}$ باستخدام التوزيع الثنائي أولا ثم باستخدام التوزيع الطبيعي ؟

الحل:

$$\boldsymbol{p(2 \le x \le 4)} = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.3662$$

أما إذا اعتبرنا X يتبع التوزيع الطبيعي بـ $\mathbf{x \sim (5\ ,\ 0.5)}$

إن التقريب سيكون أفضل لو أخذنا بدلا من $\boldsymbol{p(2 \le x \le 4)}$ العبارة $\mathbf{p\left(2 - \frac{1}{2} \le x \le 4 + 1/2\right)}$

$$\mathbf{p\left(2 - \frac{1}{2} \le x \le 4 + 1/2\right)} = \boldsymbol{p(1.5 \le x \le 4.5)} = \boldsymbol{p\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} \le z \le \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right)}$$

$$= \boldsymbol{p}\left(\frac{\mathbf{1.5 - 5}}{\mathbf{1.58}} \le \boldsymbol{z} \le \frac{\mathbf{4.5 - 5}}{1.58}\right) = \boldsymbol{p(-2.215 \le z \le -0.316)}$$

$$= p(0 < Z < -2.15) - p(0 < Z < -\mathbf{0.316})$$

$$= p(0 < Z < 2.15) - p(0 < Z < 0.316) = 0.4812 - 0.1236$$

$$= 0.3576 \simeq 0.36$$

مثال: إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة المنتجة بواسطة إحدى الآلات وهي 15%، فإذا تم اختيار عينة حجمها 150 وحدة بطريقة عشوائية من إنتاج هذه الآلة، فأحسب احتمال أن تحتوي هذه العينة على:

1/ الحصول على أقل من 20 وحدة معيبة؟

2/ 20 وحدة معيبة على الأقل؟

3/ الحصول على ما بين 15 و 20 وحدة معيبة؟

4/ أكثر من 28 وحدة معيبة؟

الحل: نتحقق من توفر شروط تطبيق التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذو الحدين:

- حجم العينة يكون كبير جداً $(n = 150 \ge 30)$.

- المتوسط يكون أكبر من أو يساوي 5 $(\mu = \ p = (150)(\ 0.15) = 22.5\ \ge 5)$.

- التباين يكون أكبر من أو يساوي 5 $(\ \sigma^2 = np(1-p) = (150)(\ 0.15)(0.85) = 19.12 \ge 5\ )$

$$\left(\sigma = \sqrt{19.12} = 4.37 \cong 4.4\right)$$

ج 1/ الحصول على أقل من 20 وحدة معيبة:

$$p(x < 20) = p\left(\frac{x-u}{\sigma} < \frac{20+0.5-22.5}{4.4}\right) = p\left(z < \frac{-2}{4.4}\right) = p(z < -0.455)$$
$$= 0.5 - p(-0.455 < z < 0) = 0.5 - p(0 < z < 0.455)$$
$$= 0.5 - 0.1754 = 0.3246$$

ج 2/ احتمال الحصول على 20 وحدة معيبة على الأقل:

$$p(x \geq 20) = p\left(\frac{x-1/2-u}{\sigma} \geq \frac{20-1/2-22.5}{4.4}\right) = p\left(z \geq \frac{-3}{4.4}\right)$$
$$= p(z \geq -0.68) = 0.5 + p(-0.68 \leq z \leq 0)$$
$$= 0.5 + p(0 \leq z \leq 0.68) = 0.5 + 0.2517 = 0.7517$$

ج 3/ الحصول على ما بين 15 و 20 وحدة معيبة:

$$p(15 \geq x \geq 20) = p\left(\frac{15-0.5-22.5}{4.4} \geq \frac{x-u}{\sigma} \geq \frac{20+0.5-22.5}{4.4}\right)$$
$$= p(-1.82 \geq z \geq -0.45)$$
$$= p(0 < Z < -1.82) - p(0 < Z < -0.45) =$$
$$= p(0 < Z < 1.82) - p(0 < Z < 0.45) = 0.4656 - 0.1736$$
$$= 0.292$$

ج 4/ احتمال الحصول على أكثر من 28 وحدة معيبة:

$$p(x > 28) = p\left(\frac{x-0.5-u}{\sigma} > \frac{28-0.5-22.5}{4.4}\right) = p(z > 1.14)$$
$$= 0.5 - p(0 < z < 1.14) = 0.5 - 0.3729 = 0.1271$$

4- توزيع كاي تربيع (x^2)

وهو من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في مجال اختبار الفروض بأنواعها، ويعد هلمرت Helmert من إكتشف هذا التوزيع سنة 1876م؛ ثم تطرق إليه كارل بيرسون $K.Pearson$ سنة 1900م؛ وأدخل عليه ولأول مرة الرمز اليوناني (kh) وذلك سنة 1905م.[1]

إذا كانت $(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n)$ متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها توزيع طبيعي معياري، فإن مجموع مربعات هذه المتغيرات يرمز له بالرمز: $x^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \cdots \ldots X_n^2$ وتوزيع هذا المجموع هو ما يعرف في الاحصاء بتوزيع كاي مربع $\boldsymbol{x^2}$.

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_n-\mu}{\sigma}\right)^2 \qquad , \qquad Z_i \sim N(0\,,1)$$

[1]- السعدي رجال، مرجع سابق، ص 230.

وعليه تعطى دالة هذا التوزيع بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^{\frac{v}{2}} \ . \ \boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{v}{2}\right)} \ . \mathrm{e}^{\frac{-x}{2}} \ . \ \boldsymbol{x}^{\frac{v-2}{2}} \quad ; \qquad 0 \leq x < \infty$$

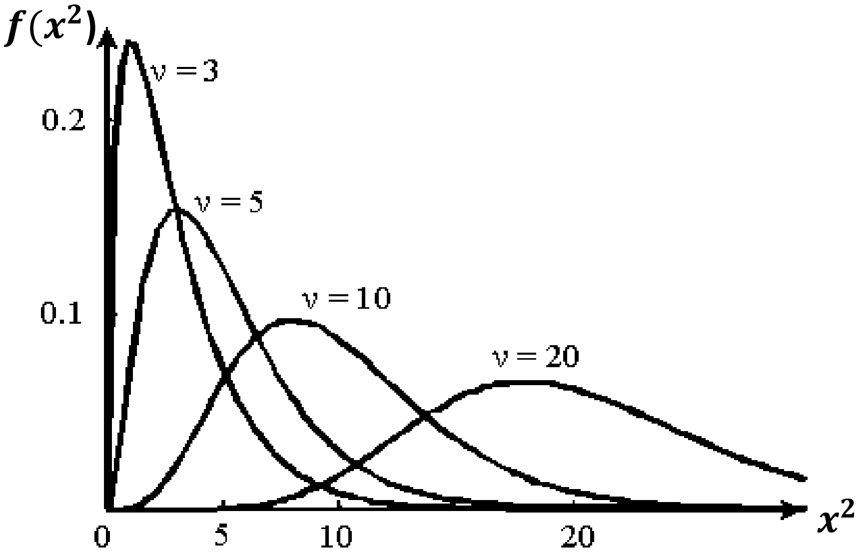
حيث v عددا صحيحا موجبا يعكس عدد درجات الحرية؛

e : مقدار ثابت، أساس اللوغاريتم الطبيعي يساوي 2.7182

$\boldsymbol{\Gamma}$: رمز الدالة الرياضية جاما *Gamma*

توقعه الرياضي $E(x) = v$ وتباينه $V(x) = 2v$.

ويلاحظ بأن المتغير العشوائي $\boldsymbol{x^2}$ لا يمكن أن يمون سالباً وبالتالي لا يمتد إلى يسار الصفر؛ وإذا كانت درجات الحرية $v > 2$ فإن لتوزيع x^2 منوال واحد ويكون ملتوياً نحو اليمين وكلما زادت درجات الحرية قل الالتواء، كما هو مبين في الشكل التالي.



ولإيجاد المساحة تحت المنحنى كاي تربيع نستعمل جدول كاي تربيع (الملحق رقم 2)، حيث يمثل العمود الأيسر درجات الحرية؛ أما الخط الأفقي المساحات إلى يسار قيمة كاي تربيع ، أما قيم كاي تربيع فهي في داخل الجدول، ونستخدم التعبير $\boldsymbol{x^2}[p \ , V]$.

وكأي تابع كثافة احتمالية فإن هذه الدالة تحقق الخاصيتين التاليتين:

$$f_X\ (X) \geq 0 \ , \qquad x \in [0 \ , \infty] \ ; \qquad \int_0^\infty f_X(X) \ dx = 1$$

مثال: إذا كانت $\boldsymbol{x^2}$ تخضع لتوزيع كاي تربيع أوجد القيم التالية:

1/ عندما تكون درجة الحرية مساوية لـ 8 عند مستوى معنوي 90% أي أن $x^2[0.9 \ , \ 8]$ أوجد قيمة x^2

$$p(x^2 < x_0^2) = 0.9$$

2/ عندما تكون درجة الحرية مساوية لـ 17 عند مستوى معنوي 95% $x^2[0.95\ ,\ 17]$ أوجد قيمة x^2

$$p(x^2 > x_0^2) = 0.95$$

الحل: في الحالة رقم 01:

$$p(x^2 < x_0^2) = 0.9 \qquad x^2[0.9\ ,\quad 8]$$

نطبيق العلاقة التالية لكي نتمكن من قراءة القيمة من الجدول:

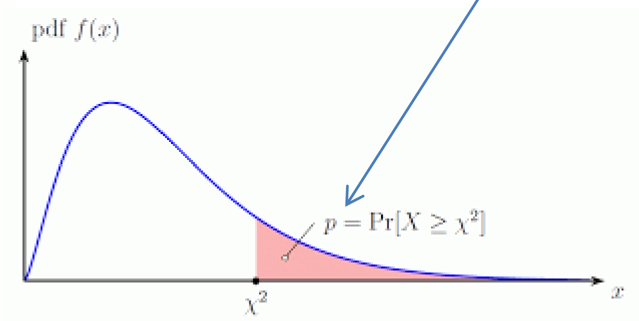
$$p(x^2 < x_0^2) = 1 - p(x^2 > x_0^2)$$

$$p(x^2 < x_0^2) = 1 - p(x^2 > x_0^2) = 1 - 0.9 = 0.1 \ \Rightarrow\ x_0^2 = 13.36$$

الحالة 02:

$$p(x^2 > x_0^2) = 0.95 \qquad x^2[0.95\ ,17]$$

مباشرة من الجدول $\Rightarrow\ x_0^2 = 8.67$



تمارين الفصل السادس

التمرين 01: إذا كان لديك المتغير العشوائي المستمر (Z)، يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري، أي أن: $Z \sim N(0\,,1)$

$1)\ p(z \le 1.25)$ $2)\ p(z \le 2.78)$ $3)\ p(z \le -2.28)$ $4)\ p(z \le -1.79)$

$5)\ p(z > 2.29)$ $6)\ p(z \ge 1.58)$ $7)\ p(z \ge -1.33)$ $8)\ p(z \ge -2.75)$

$9)\ p(0.45 < z \le 1.25)$ $10)\ p(-1.18 \le z \le 2.28)$

التمرين 02: إذا كانت علامات 10000 طالب في جامعة البليدة تتبع التوزيع الطبيعي ذي الوسط 80 و تباين 30 أوجد كل من ما يلي:

1/ أوجد عدد الطلبة الذين تنحصر علاما تهم بين 70 و 90؟

2/ نسبة الطلبة الذين تزيد علاماتهم عن العلامة 95 و كم عددهم؟

3/ ما هي أقل علامة تحصل عليها 20% من الطلبة الأوائل؟

التمرين 03: بفرض أن الطلب الشهري على منتج ما يتبع تقريباً توزيع الطبيعي بمتوسط 200 وحدة وانحراف معياري 40 وحدة، ما هي أكبر كمية مخزون يكون متاحاً في بداية الشهر بشرط أن احتمال نفاذ المنتج (المخزون) خلال الشهر لا يزيد عن 5%؟

التمرين 04: إذا كان دخل 700 أسرة إحدى ولايات الجزائر يتبع توزيعاً طبيعيا وسطه 25000دج؛ وانحرافه 4000 دج.

المطلوب: أوجد:

1/ احتمال الحصول على دخل أكبر من 21000دج؟ (0.8413)

2/ احتمال الحصول على دخل أكبر من 29000دج؟ (0.1056)

3/ احتمال الحصول على دخل ينحصر بين 22500دج و 27000دج؟ (0.42555)

4/ احتمال الحصول على دخل يقل عن 19000دج؟ (0.0668)

5/ عدد الأسر التي يزيد دخلها عن 20000دج؟ (0.8944) . (700)= 626 اسرة)

التمرين 05: إذا كانت $X \sim N(73\,,52)$ أوجد قيمة كل من ما يلي:

$1)\ p(X < 80)$ $2)\ p(X > 85)$ $3)\ p(X < 64)$

$4)\ p(65 < X < 78)$ $5)\ p(65 < X < 78)$

التمرين 06: بفرض أن أوزان الأشخاص الذين يستخدمون مصعداً معيناً تتوزع وفق التوزيع الطبيعي $X \sim N(80\,,100)$ والحد الأعلى المسموح به لحمولة المصعد هو 350 كغ.

المطلوب: 1/ بصورة عشوائية يجتمع أربعة أشخاص في المصعد، ما احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟

2/ بصورة عشوائية هناك شخص واحد في المصعد ومعه أمتعة تزن ثلاثة أمثال وزنه، ما احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟

التمرين 07: ألقى شخص قطعة نقود على سطح مستوي 10 مرات متتالية أحسب احتمال ظهور الصورة في ثلاث مرات فقط باستخدام التوزيع ذو الحدين وباستخدام التقريب للتوزيع الطبيعي المعياري؟

التمرين 08: تدعي شركة لصنع الأدوية بأن أحد الأدوية التي تنتجها تؤدي إلى شفاء 80% من المرضى الذين يعالجون به، ولاختبار هذا الادعاء أخذت عينة من 100 مريض، وعولجوا بهذا الدواء، واتخذ القرار بقبول هذا الادعاء إذا شفي منهم 75 مريضاً أو أكثر.

المطلوب: 1/ ما احتمال رفض ادعاء الشركة إذا كان احتمال الشفاء باستخدام هذا الدواء هو 0.8 **فعلاً؟**

2/ ما احتمال قبول ادعاء الشركة إذا كان احتمال الشفاء لا يتجاوز 0.7 ؟

التمرين 09: إذا كانت نسبة المصابين بارتفاع ضغط الدم في المجتمع كبير 5% ، فإذا تم اختيار 600 شخصاً بصفة عشوائية من هذا المجتمع، وتم قياس ضغط دمهم.

المطلوب: فما هو احتمال وجود 20 شخص على الأقل مصابين بارتفاع ضغط الدم؟

التمرين 10: سجل أحد مستشفيات العيون نسبة 6% من المرضى بمرض التهاب القرنية، فإذا تم اختيار عينة من 200 فرد وتم فحصهم لمعرفة إصابتهم من عدمه بمرض التهاب القرنية.

المطلوب: ما احتمال أن يكون عدد المصابون بمرض التهاب القرنية على الأقل 20 فرداً؟ (0.0129)

2/ احتمال أن يكون على الأكثر 15 فرداً؟ (0.8508)

3/ احتمال أن يكون 15 فرد بالضبط؟ (0.0804)

4/ احتمال أن يكون عدد المصابون ما بين $p(15 \leq x \leq 20)$ ؟ (0.2399)

التمرين 11: في أحد المدن تم تسجيل نسبة الأفراد المدخنين والمصابون بمرض السرطان 12%، وأخذت عينة من هذه المدينة مكونة من 400 مدخن، وفحصوا لتحقق من إصابتهم بمرض السرطان من عدمه، فالمطلوب:

1/ ما احتمال أن تحتوي العينة على 30 فرد مصاب بالسرطان؟

2/ احتمال أن تضم 70 فرد على الاقل مصابون بمرض السرطان؟

التمرين 12: حدد القيمة المتوقعة (μ_x) والانحراف المعياري (σ_x) للمتغير العشوائي X الذي يخضع للتوزيع الطبيعي إذا علمت أن:

1/ $p(x \leq 0.99) = 0.5$

2/ $p(0.49 \leq x \leq 1.49) = 0.95$

التمرين 13: إذا كانت x^2 تخضع لتوزيع كاي تربيع أوجد القيم x_0^2 في الحالات التالية:

1) $p(x^2 < x_0^2) = 0.9 \quad \nu = 12$, 2) $p(x^2 < x_0^2) = 0.95 \quad \nu = 19$

3) $p(x^2 < x_0^2) = 0.995 \quad \nu = 30$, 4) $p(x^2 \geq x_0^2) = 0.99 \quad \nu = 25$

5) $p(x^2 \geq x_0^2) = 0.75 \quad \nu = 4$, 6) $p(x^2 \geq x_0^2) = 0.975 \quad \nu = 70$

التمرين 14: في توزيع كاي تربيع على درجة حرية 25 أوجد كل من:

1) $p(x^2 < 37.65)$ 2) $p(x^2 < 19.94)$ 3) $p(x^2 < 11.52)$

4) $p(x^2 \geq 44.31)$ 5) $p(x^2 \geq 52.62)$ 6) $p(x^2 \geq 3.65)$

التمرين 15: في توزيع كاي تربيع أوجد درجة الحرية في الحالات التالية:

1) $x^2[0.95\ ,\nu] = 2.73$ **2**) $x^2[0.90\ ,\nu] = 7.79$ **3**) $x^2[0.995\ ,\nu] = 10.52$

4) $x^2[0.05\ ,\nu] = 30.14$ **5**) $x^2[0.25\ ,\nu] = 45.62$ **6**) $x^2[0.01\ ,\nu] = 15.09$

حلول تمارين الفصل السادس

حل التمرين 01:

1) $p(z \le 1.25) = 0.5 + 0.3944 = 0.8944$

2) $p(z \le 2.78) = 0.5 + 0.4973 = 0.9974$

3) $p(z \le -2.28) = 0.5 - p(-2.28 < z < 0) = 0.5 - 0.4887 = 0.0113$

4) $p(z \le -1.79) = 0.5 - p(-1.79 < z < 0) = 0.5 - 0.4633 = 0.0367$

5) $p(z > 2.29) = 0.5 - 0.489 = 0.011$

6) $p(z \ge 1.58) = 0.5 - 0.4429 = 0.0571$

7) $p(z \ge -1.33) = 0.5 + p(-1.33 < z < 0) = 0.5 + 0.4082 = 0.9082$

8) $p(z \ge -2.75) = 0.5 + p(-2.75 < z < 0) = 0.5 + 0.497 = 0.997$

9) $p(0.45 < z \le 1.25) = p(0 < z < 1.25) - p(0 < z < 0.45)$

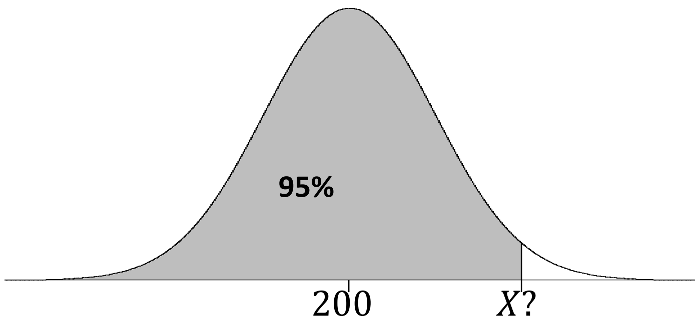
$$= 0.3944 - 0.1736 = 0.2208$$

10) $p(-1.18 \le z \le 2.28) = p(0 < z < 1.25) + p(-1.18 < z < 0)$

$$= p(0 < z < 1.25) + p(0 < z < 1.18) = 0.3944 + 0.381$$

$$= 0.7754$$

حل التمرين 03: بفرض أن X متغير العشوائي يمثل الطلب الشهري، حيث X له توزيع طبيعي بمتوسط 200 وحدة وإنحراف معياري 40 وحدة، نحن نبحث عن بداية معينة لمستوى المخزون X بحيث يكون إحتمال أن يتعدى الطلب الشهري الفعلي القيمة X هو 0.05 وهذا يعادل القول بأن احتمال أن الطلب الشهري الفعلي لن يزيد عن القيمة X هو 0.95 ، لذلك نبحث عن القيمة الجزيئية X بحيث أن 95% من المساحة الكلية لتوزيع الطلب تكون على يسارها، بمعنى اخر أن X هي قيمة النسبة المئوية الخامسة والتسعون كما في الشكل التالي:



تحسب المساحة على يسار X تساوي المساحة على يسار Z أي:

$$p(Z \leq X) = p(Z \leq Z_1) = 0.95$$

$$Z = \frac{x - 200}{40}$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري (الملحق 01)، نجد القيمة 0.95=0.5+0.45 أي أننا نبحث عن القيمة 0.45 في الجدول، بحيث نجدها تقع بين قيمتين هما (1.64) و (0.165) ومنه نقوم بالفرق بين هاتين القيمتين لنحصل على القيمة 1.645. ومنه نجد قيمة X.

$$Z = 1.645 = \frac{x - 200}{40} \quad \Rightarrow 1.645 \,.\, 40 = X - 200 \quad \Rightarrow \quad X = 265.8$$

لذا فإن بدايات المخزون الشهري يجب أن لا تقل عن 266 وحدة، على أن فرض احتمال نفاذ المخزون خلال الشهر لا يزيد عن 5%.

حل التمرين 06: بفرض أن أوزان الأشخاص الأربعة هي $(x_4 , x_3 \,,\, x_2 , x_1)$ فتكون الأوزان مستقلة و $i = 1, 2 \,, 3 \,, 4$ $\quad X_i \sim N(80 \,, 100)$ و يكون الاحتمال المطلوب:

1) $\qquad p(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 35) = p(\sum_{i=1}^{4} x_i > 350)$

ولكن $i = 1, 2 \,, 3 \,, 4$ $\quad \sum_{i=1}^{4} x \quad \sim N(320 \,, 400)$

$$p\left(\sum_{i=1}^{4} x_i > 350\right) = p\left(\frac{x_i - 320}{20} > \frac{350 - 320}{20}\right) = p(z > 3/2)$$

$$= 0.5 - p(0 < z < 1.5) = 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

2/ إذا رمزنا لوزن الشخص X فيكون وزن الأمتعة 3X ويكون الاحتمال المطلوب:

$$2)\ p(4x > 350) = p(x > 87.5) = p\left(\frac{x - \mu}{\sigma} > \frac{87.5 - 80}{10}\right) = p(z > 0.75)$$

$$= 0.5 - p(0 < z < 0.75) = 0.5 - 0.2734 = 0.2266$$

حل التمرين 07: 1/ باستخدام قانون التوزيع ذو الحدين:

$$\boldsymbol{p(x = 3)} = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0.1171875$$

2/ أما إذا اعتبرنا X يتبع التوزيع الطبيعي بـ $\mathbf{x \sim (5 \;, 0.5)}$

إن التقريب سيكون أفضل لو أخذنا بدلا من $\boldsymbol{p(x = 3)}$ بالعبارة $\mathbf{p\left(3 - \frac{1}{2} \leq x \leq 3 + 1/2\right)}$

أي التحول إلى مسافة أو فئة وذلك بطرح 0.5 و إضافة 0.5 ، ثم نحسب الدرجة المعيارية لحدي الفئة في التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

$$\mathbf{p}\left(3-\frac{1}{2} \le x \le 3+1/2\right) = p(2.5 \le x \le 3.5) = p\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \le z \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$= p\left(\frac{2.5-5}{1.58} \le z \le \frac{3.5-5}{1.58}\right) = p(-1.58 \le z \le -0.95)$$

$$= p(0 < Z < -1.58) - p(0 < Z < -0.95)$$

$$= p(0 < Z < 1.58) - p(0 < Z < 0.95) = 0.4429 - 0.3289$$

$$= 0.114$$

حل التمرين 09: X يمثل عدد الاشخاص المصابين بضغط الدم، وهو عبارة عن متغير يتبع التوزيع المتقطع ذو الحدين.

$$b(x: 600\ , 0.05) = C_x^{600}(0.05)^x\,(0.95)^{600-x} \qquad , x = 0,1 \ldots .600$$

الاحتمال المطلوب حسابه هو:

$$b(x \ge 20) = b(20: 600\ , 0.05) + b(21: 600\ , 0.05) + b(22: 600\ , 0.05) + \cdots \ldots \ldots \ldots b(600: 600\ , 0.05)$$

ومن الصعب حساب قيمة هذا الاحتمال وبالتالي نلجأ إلى التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذو الحدين، والذي توزيعه وتباينه كما يلي:

- حجم العينة يكون كبير جداً $(n = 600 \ge 30)$.
- المتوسط يكون أكبر من أو يساوي 5 $(\mu = p = (600)(0.05) = \mathbf{30} \ge 5)$.
- التباين يكون أكبر من أو يساوي 5 $(\sigma^2 = np(1-p) = (600)(0.05)(0.95) = \mathbf{28.5} \ge 5)$

أي أن $\sigma = 5.34$ ، للحصول على الاحتمال نقوم بحساب المساحة على يمين القيمة 19.5

$$p(x \ge 20) = p\left(z \ge \frac{20-0.5-30}{5.34}\right) = p(z \ge -1.97)$$

$$= 0.5 + (0 < z < 1.97) = 0.5 + 0.4756 = 0.9756$$

حل التمرين 13: إذا كانت $\boldsymbol{x^2}$ تخضع لتوزيع كاي تربيع أوجد القيم x_0^2 في الحالات التالية:

1) $p(x^2 < x_0^2) = 0.9 \qquad \nu = 12$

نطبق العلاقة التالية لكي نتمكن من قراءة القيمة من الجدول:

$$p(x^2 < x_0^2) = 1 - p(x^2 > x_0^2)$$

$$p(x^2 < x_0^2) = 1 - p(x^2 > x_0^2) = 1 - 0.9 = 0.1 \;\Rightarrow\; x_0^2 = 14.85$$

2) $p(x^2 < x_0^2) = 0.95 \qquad \nu = 19$

$$p(x^2 < x_0^2) = 1 - p(x^2 > x_0^2) = 1 - 0.95 = 0.05 \;\Rightarrow\; x_0^2 = 30.14$$

3) $p(x^2 < x_0^2) = 0.995 \quad \nu = 30$

$p(x^2 < x_0^2) = 1 - p(x^2 > x_0^2) = 1 - 0.995 = 0.005 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = 53.67$

4) $p(x^2 \geq x_0^2) = 0.99 \quad \nu = 25 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = 11.52$

5) $p(x^2 \geq x_0^2) = 0.75 \quad \nu = 4 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = 1.92$

6) $p(x^2 \geq x_0^2) = 0.975 \quad \nu = 70 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = 48.76$

قائمة المراجع

قائمة الكتب:

1- أحمد علي الزغول، **مدخل إلى الاحتمالات وتطبيقاتها،** دار الفرقان للنشر والتوزيع، الأردن، 2003، ط 2.

2- برنارد تايلور الثالث، تعريب سرور علي ابراهيم سرور، **مقدمة في علم الإدارة،** دار المريخ، الرياض،2007.

3- ثروت محمد عبدالمنعم، **مدخل حديث للإحصاء والاحتمالات،** ط 1، دار النشر مكتبة العبيكان، السعودية، 2004.

4- حمدي طه، بحوث العمليات ، الجزء الثاني: النماذج الإحتمالية، دار المريخ، السعودية، 2014.

5- حسن ياسين طعمة و إيمان حسين حنوش، **الإحصاء الإستدلالي،** دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2012.

6- جورج كانافوس و دون ميلر، تعريب سلطان محمد عبد الحميد، **الإحصاء للتجاريين مدخل حديث،** دار المريخ، السعودية، 2004.

7- جيلالي جلاطو، **نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية،** دار هومه، الجزائر، 2014.

8- جبار عبدمضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات،** ط 1، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الأردن، 2001.

9- جلال الصياد وأخرون، **الإحصاء،** دار حافظ للنشر والتوزيع، السعودية، سنة 1429ه.

10- عزام صبري، **الإحصاء الرياضي،** ط 1، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2010.

11- شفيق العتوم، **طرق الإحصاء تطبيقات اقتصادية وإدارية،** دار المنهاج للنشر والتوزيع، الأردن، 2006، ط 1.

12- شفيق العتوم، **طرق الإحصاء –تطبيقات اقتصادية وإدارية باستخدام spss،** ط 1، دار المنهاج للنشر والتوزيع، الأردن، 2005.

13- لحسن عبدالله باشيوة، **مقدمة في الاحتمالات،** ط 1، دار الوارق للنشر والتوزيع، الأردن، 2013.

14- محمد حسين محمد رشيد و منى عطاالله الشويلات، **مبادئ الإحصاء والاحتمالات ومعالجتها باستخدام برنامج spss،** ط 1، دار صفاء لنشر والتوزيع، الأردن، 2012.

15- موراي شبيجل و أخرون، ترجمة: محمود على أبو النصر و أخرون، **الاحتمالات والاحصاء،** الدار الدولية للاستثمارات الثقافي، مصر، 2004.

16- مبارك اسبر ديب، **مبادئ في الإحتمالات والإحصاء،** قسم الرياضيات، السنة الأولى، جامعة تشرين، كلية العلوم، سوريا، 2009/2008.

17- محمود محمد سليم صالح، **مبادئ التحليل الإحصائي،** ط 1، جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية، السعودية، 2011.

18-Prasanna Sahoo, **Probability and Mathmatical statistics**, Department of Mathematics University of Louisville, KY 40292 USA, 2008.

19 -Ronald E. Walpole And others, **Probability & Statistics for Engineers & Scientists,** Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, United States of America, 2012.

20- Murray R. Spiegel And others, **Probability and statistics**, third edition,the Mcgraw-hill Companies, USA, 2013.

21- Gane Samb LO, **Mathematical Foundations of Probability Theory**, SPAS Books Series, Saint-Louis, Calgary, Alberta, 2018.

22- Michael Evans and Jeffrey Rosenthal, **Probability and Statistics,** Second Edition, University of Toronto, canada, 2009.

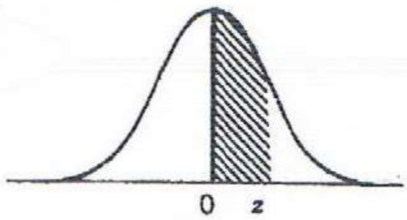
23- A.G. Frodesen , O. Skjeggestad, **probability and statistics in particle physics,** Columbia University Press, Norway, 1979.

قائمة الملاحق

الملحق 01

التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري)

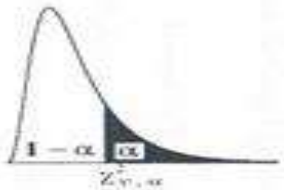
المساحة المظللة تمثل $P(0<Z<z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2703	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997

الملحق 02

Chi-Square (χ^2) Distribution



Percentage Points of the χ^2 Distribution; $\chi^2_{v,\alpha}$

$P(\chi^2 > \chi^2_{v,\alpha}) = \alpha$

	α														
v	**0.001**	**0.005**	**0.010**	**0.025**	**0.050**	**0.100**	**0.250**	**0.500**	**0.750**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**	**0.999**
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74
70	112.32	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33	61.92